Le problème qui va suivre est un extrait de l'ancien concours d'entrée aux écoles des Mines d'Albi, d'Alès, de Douai et de Nantes communément appelé le concours des "petites Mines" qui se passait avant 2009 en fin de première année de CPGE pour toutes les filières.

Il ne s'agit pas de l'énoncé exact qui a été posé le jour du concours, mais il est totalement fidèle à l'esprit de l'épreuve et il comporte quelques adaptations, notamment pour répondre aux exigences des nouveaux programmes.

Il s'agit donc d'un bon entraînement pour les élèves en fin de première année, mais aussi pour ceux qui vont débuter leur deuxième année. Il faut en effet affermir ses connaissances de première année pour bien débuter une année à concours qui sera bien chargée !

Le sujet principal est la résolution d'une récurrence linéaire sur les suites numériques avec un second membre polynomial.

Après avoir donné les exemples bien connus (suites arithmético-géométriques), le problème propose de donner des outils de bon niveau pour résoudre de façon générale un tel type de relation de récurrence.

En effet, on retrouve de nombreuses notions d'algèbre linéaire (espaces vectoriels classiques, bases, applications linéaires, noyau, image...) qui, combinées aux connaissances de base sur les polynômes (degré, racines, famille de polynômes...), donne un point de vu intéressant et finalement universel pour aborder le problème.

Il ne reste qu'à vous souhaiter bon courage pour traiter ce problème et faire une bonne synthèse de vos connaissances !

Problème (*d'après Ecoles des Mines 1ère année*)

Soit a un réel et $P \in \mathbb{R}[X]$. Le but du problème est d'étudier les suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + P(n)$ où P est un polynôme à coefficients réels.

Partie I : cas des polynômes constants

Dans cette partie, on étudie $E_{a,b} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists b \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

1. Déterminer l'ensemble $E_{a,b}$ (forme explicite des suites).
2. Soit x la suite constante égale à 1 et $y = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que la famille $\{x, y\}$ est libre.
   (b) En déduire une base et la dimension de $E_{a,b}$ dans tous les cas.

Partie II : cas $a \neq 1$

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$. Soit également $m \in \mathbb{N}$ et on définit alors :

$$E_{a,m} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists P \in \mathbb{R}_m[X] / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$$

3. (a) Montrer que $\varphi : \mathbb{R}_m[X] \to \mathbb{R}^{m+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(0), ..., P(m))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) En déduire que si on prend $u \in E_{a,m}$, le polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$ est unique. On le note alors P_u.
4. Justifier que $E_{a,m}$ est un espace vectoriel.
5. On définit $\theta : E_{a,m} \to \mathbb{R}[X]$ par $\theta(u) = P_u$. Montrer que θ est une application linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}(\theta)$.
6. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.
   (a) Déterminer le degré de Q_k.
   (b) Montrer que la famille $\{Q_0, Q_1, ..., Q_m\}$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![0, m]\!]$ on a $Q_k \in \mathrm{Im}(\theta)$: que dire alors de $\mathrm{Im}(\theta)$?
   (d) Conclure sur la dimension de $E_{a,m}$.
7. On définit pour tout $k \in [\![0, m]\!]$ $x_k = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note toujours $y = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\{x_0, ..., x_m, y\}$ forme une base de $E_{a,m}$.
8. *Application :* Déterminer la suite définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$.

Partie III : cas $a = 1$

9. En adaptant les résultats de la partie II, déterminer la forme des suites pour lesquelles il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u_{n+1} = u_n + P(n)$.
10. *Application :* Déterminer la suite définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 6n + 1$.