



Problème

Sur le problème aux limites dans une équations différentielle linéaire d'ordre 2 - d'après le concours ESIM

Soit a , b et c trois fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit α et β deux nombres réels. Soit alors **(P)** le problème suivant :

Trouver f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ telle que :
$$\begin{cases} f''(x) = a(x)f(x) + b(x)f'(x) + c(x) \\ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta \end{cases}$$

Il s'agit précisément du *problème aux limites* (en 0 et 1) pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2. En particulier, **il ne s'agit pas du problème de Cauchy**.

1. Justifier l'existence et l'unicité de deux fonctions g et h solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} g''(x) = a(x)g(x) + b(x)g'(x) \\ g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} h''(x) = a(x)h(x) + b(x)h'(x) + c(x) \\ h(0) = \alpha \text{ et } h'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Soit f une solution de **(P)**. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f = h + \lambda g$.

3. Montrer que si $g(1) \neq 0$, alors **(P)** admet une unique solution.

4. Soit l'équation différentielle $(E) : y'' = -(1 + \pi^2)y + 2y' + x$.

(a) Déterminer les solutions de (E) sur $[0, 1]$.

(b) Existe-t-il des solutions de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 2$?

5. Soit maintenant f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

(a) Montrer que la fonction $q : x \mapsto \frac{f(x)}{\sin(\pi x)}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.

(b) On suppose ici que q est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

i. Calculer $\int_0^1 q'(x)q(x) \sin(2\pi x) dx$ en fonction de $\int_0^1 [q(x)]^2 \cos(2\pi x) dx$.

ii. Montrer alors que $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx$.

(c) Montrer que l'inégalité précédente reste vraie si q n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

6. On suppose dans cette question que pour tout x de $[0, 1]$ on a $b(x) = 0$ et $a(x) > -\pi^2$. Montrer que **(P)** admet une unique solution.

Indication : Considérer $\int_0^1 g''(x)g(x)dx$ en intégrant par parties où g est définie à la première question.

Indications

1. Identifier les problèmes posés comme des problèmes de Cauchy.
2. Identifier de quel problème de Cauchy est solution la fonction $f - h$. Regarder en particulier sa dérivée en 1 pour l'obtention de λ .
3. Si $g(1) \neq 0$, expliciter l'unique valeur de λ possible dans l'écriture précédente.
4. (a) Il s'agit d'une équation à coefficients constants. On applique la méthode de résolution par l'équation caractéristique. Pour la solution particulière, la recherche sous forme affine.

(b) Calculer les paramètres de la solution précédemment trouvée vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 2$ (s'ils existent).
5. (a) Etudier l'existence de limite de q en 0 et en 1. On pourra faire appel à des développements limités.

(b) i. Procéder à une intégration par parties sur le terme $\int_0^1 q'(x)q(x) \sin(2\pi x) dx$.

ii. Réexprimer les intégrales en jeu en fonction de q . Après des réductions trigonométriques, montrer que la différence entre les deux intégrales peut s'estimer en fonction d'une intégrale de fonction positive.

(c) q est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. On pourra reprendre les calculs d'intégrales précédentes sur un segment $[a, b]$ quelconque de $]0, 1[$ pour tenter d'approcher le résultat sur $[0, 1]$.
6. On note qu'il y a existence et unicité de la solution si $g(1) \neq 0$. Supposer par l'absurde que $g(1) = 0$ et étudier le terme $\int_0^1 g''(x)g(x)dx$ (en intégrant par parties) pour obtenir une contradiction.