



Problème

Autour de la fonction tangente

On se propose dans un premier temps d'aborder de plusieurs façons le développement en série entière de $\tan$. On donne en deuxième partie une application probabiliste. Enfin, la dernière partie fera office de synthèse en parlant de la fonction $\tanh$ où l'on pourra toucher du doigt les fonctions de variables complexes.

Partie I : Le développement en série entière de tangente

1. (a) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. En écrivant $f(x) \cos(x) = 1$, déterminer l'éventuel développement en série entière $\sum a_n x^n$ de f en donnant une relation de récurrence sur les coefficients a_n .
(b) En déterminant une majoration de a_n pour tout n , montrer que f est bien développable en série entière au moins sur $] -1, 1[$.
(c) En déduire enfin que $\tan$ est développable en série entière au moins sur $] -1, 1[$.
2. Dans cette question, on cherche à retrouver l'existence du précédent développement en série entière d'une autre façon (on ne suppose donc pas connu son existence ici).
(a) Montrer que $\tan$ est l'unique fonction solution sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ du problème $(P) : \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
(b) Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est une solution de (P) développable en série entière au voisinage de 0, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (b_n) .
(c) En majorant la suite (b_n) , retrouver que $\tan$ est développable en série entière au moins sur $] -1, 1[$.
(d) Quelle relation y a-t-il entre les suites (a_n) (cf. question 1.) et (b_n) ?
(e) Calculer à l'aide de ce qui précède le développement limité de $\tan$ à l'ordre 5 en 0.
(f) Ecrire une procédure **Python** qui permet de calculer la liste des n premiers coefficients $b_0, \dots, b_{n-1}$. Retrouver des valeurs antérieures.
3. On se propose d'améliorer le domaine sur lequel $\tan$ est développable en série entière.
(a) Montrer que toutes les dérivées successives de $\tan$ sont positives sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
(b) A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que la série de Taylor $\sum \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Problème

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on pose $R_n(x) = \int_0^x \frac{\tan^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$.
En effectuant le changement de variable $t = xu$, montrer que pour tout x on a
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.
- (d) En déduire que $\tan$ est développable en série entière sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Partie II : Une fonction génératrice

On définit sur $] -2, 2[$ la fonction g par $\forall x \in] -2, 2[, g(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

4. Montrer que f est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas la loi de X).
5. Calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
6. Que dire de $P(X = 2k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?
7. Calculer (si elles existent) $E(X)$ et $V(X)$.

Partie III : une adaptation à th

8. En s'inspirant de méthodes exposées précédemment, étudier la développabilité de $\tan$ en série entière. Le cas échéant, on donnera le rayon de convergence.
Pour cela, on étudiera les fonctions exprimées en fonction de $z \in \mathbb{C}$:

$$c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad t(z) = \frac{s(z)}{c(z)}$$

Indications

Partie I : Le développement en série entière de tangente

1. (a) Puisque $f(x) \cos(x) = 1$, il faut par analyse déterminer une relation de récurrence sur les coefficients (a_n) connaissant ceux de $\cos$. Le moyen pour l'obtenir est d'écrire le membre de gauche comme produit de Cauchy de séries entières.
- (b) Il n'est pas difficile de montrer que l'on a $|a_n| \leq 1$. Pour cela, procéder par récurrence. Le rayon de convergence peut alors à l'inverse être minoré.
- (c) Utiliser à présent que $\tan = f \cdot \sin$ puis obtenir le développement de $\tan$ par produit de Cauchy, du moins justifier son existence (il est inutile de la calculer pour l'instant).
2. (a) On peut facilement vérifier que $\tan$ est solution de (P) .
Pour la réciproque, il faut intégrer la relation $\frac{y'}{1+y^2} = 1$. On prendra garde aux intervalles et à la condition initiale.
- (b) Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, on connaît $y'(x)$. En l'introduisant dans l'équation $y' = 1 + y^2$, on peut trouver une relation de récurrence (développer y^2 par produit de Cauchy encore une fois).
- (c) On peut obtenir facilement $|b_n| \leq 1$ (utiliser une récurrence).
- (d) On pourra utiliser l'unicité du développement en série entière, obtenu de deux façons différentes par la relation $y' = 1 + y^2$.
- (e) On aura le choix entre deux méthodes déjà données pour calculer les coefficients.
- (f) On pourra utiliser la relation de récurrence déjà prouvée. Il faudra faire attention aux indices et faire augmenter la liste à chaque tour de boucle.
3. (a) Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'ordre de dérivation. On pourra en particulier montrer que cette dérivée n -ième peut s'exprimer de façon polynomiale en $\tan(x)$ (que dire alors des coefficients du polynôme ?). Cette propriété pourra servir dans la suite.
- (b) La série $\sum \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est à termes positifs. Trouver un majorant fixe dans la formule de Taylor des sommes partielles de la série. Regarder en particulier le reste de Taylor.
- (c) Pour majorer le reste, il faut penser au fait que les dérivées successives de $\tan$ sont polynomiales en $\tan(x)$. La factorielle impose la limite.