

A propos du débitmètre à effet Coriolis

Partie I – Etude préliminaire

I.A) * Loi de composition des vitesses

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

* Alors, pour $\vec{\Omega} = \overrightarrow{cste}$:

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_R + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' \\ \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

(loi de composition des accélérations).

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\Omega^2 \vec{X} \\ \vec{a}_c = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' = 2 \Omega v' \vec{Y} \end{array} \right.$$

I.B.1) Dans (R') : $\vec{a}' = \vec{0}$ ($v' = cste$), donc :

$$\vec{O} = m\vec{g} + \vec{R}_{T \rightarrow M} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c + \vec{F}$$

En l'absence de frottements :

$$\vec{R}_{T \rightarrow M} \cdot \vec{X} = 0, \text{ de sorte que :}$$

$$F = -m\Omega^2 X \quad (\text{pour maintenir } v' = cste)$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} \vec{R}_{T \rightarrow M} & 0 \\ \hline (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) & 2 m\Omega v' \\ & mg \end{array} \right)$$

Enoncé en fin de document.

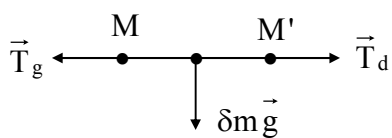
I.B.2) Principe des actions réciproques (3^e loi de Newton)

$$\vec{R}_{T \rightarrow M} = - \vec{R}_{M \rightarrow T}$$

Partie II – Principe du débitmètre à effet Coriolis

II.A) Etude des vibrations du tube en absence de fluide

II.A.1) Au repos, pour un brin élémentaire de longueur dy :



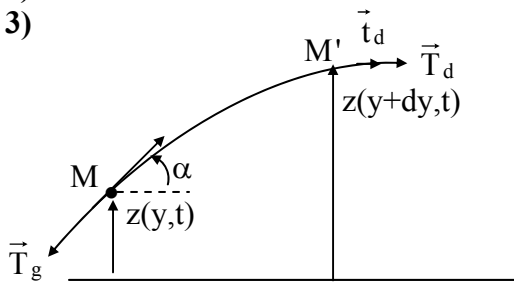
$$\vec{T}_g + \vec{T}_d + \delta m \vec{g} = \vec{0}$$

Comme le tube est supposé confondu avec l'axe Oy, on en déduit :

$$\begin{cases} \vec{T}_g + \vec{T}_d = \vec{0} : T_g = T_d = T_0 \\ \delta m \vec{g} = \vec{0} , \text{ ce qui revient à négliger les effets de la pesanteur} \end{cases}$$

II.A.2) En mouvement

3)



$$\delta m \vec{a}(M,t) = \cancel{\delta m \vec{g}} + \vec{T}_g + \vec{T}_d$$

négligé

Avec :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

Or :

$$\vec{v} = v(y,t) \vec{z} \quad (\text{hypothèse H II.2})$$

Donc :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$$

En projection sur $\vec{y}$ et $\vec{z}$, l'équation du mouvement du brin MM' de corde s'écrit donc :

Enoncé en fin de document.

$$\begin{cases} \delta m = \frac{\partial v_z}{\partial t} = (T \sin \alpha)_{y+dy} - (T \sin \alpha)_y & (1) \\ O = (T \cos \alpha)_{y+dy} - (T \cos \alpha)_y & (2) \end{cases}$$

Comme $\alpha \rightarrow 0$ (hypothèse H.II.3) (2) donne :

$$T_{y+dy} = T_y = \text{cste } T_0$$

Puis, (1) s'écrit alors :

$$\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial}{\partial y} (\sin \alpha) dy$$

Avec toujours :

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial y}$$

D'où :

$$\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$$

Enfin :

$$\delta m = \mu ds \quad (ds = \widehat{MM'}) = \mu \frac{dy}{\cos \alpha} \approx \mu dy$$

Et finalement :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (E_1)$$

II.A.4) On obtient une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad C = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

La solution la plus générale est : $z(y,t) = z^+ \left(t - \frac{y}{C} \right) + z^- \left(t + \frac{y}{C} \right)$, superposition de 2 OPP se propageant selon 0y croissant et décroissant respectivement..

II.A.5) a) On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire (i.e. non progressive) :

$$z(y,t) = f(y)g(t)$$

b) Alors, l'équation (E₁) s'écrit :

$$f''(y)g(t) = \frac{1}{C^2} f(y) g''(t)$$

Soit :

$$\underbrace{\frac{g''(t)}{g(t)}}_{G(t)} = C^2 \underbrace{\frac{f''(y)}{f(y)}}_{F(y)}, \text{ donc } = \text{cste}$$

- Si $\text{cste} > 0$, on aurait $f(y) = F_1 \text{ch}(ky) + F_2 \text{sh}(ky)$ qui ne peut satisfaire aux conditions aux limites $f(0) = f(D) = 0$ sauf à être identiquement nulle.

Enoncé en fin de document.

• Si $cste = 0$, on aurait $f(y) = F_1 y + F_2$, et de même les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites.

Donc nécessairement : $cste = -w^2 < 0$

Alors : $\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t) + w^2 g(t) = 0$

$$f''(y) + \underbrace{\frac{w^2}{C^2}}_{k^2} f(y) = 0$$

D'où :

$$z(y,t) = Z \cos(wt + \varphi) \sin(ky + \psi)$$

avec

$$k = \frac{w}{C}$$

c) * Conditions aux limites : $z(0,t) = z(L,t) = 0, \forall t$

$$\Rightarrow \psi = 0$$

$$kL = p\pi, p \in \mathbb{N}^* : k_p = \frac{p\pi}{L}$$

* Dispositif excitateur : $z\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 \cos(2\pi ft), \forall t$

$$\Rightarrow Z \cos(wt + \varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = Z_0 \cos(2\pi ft)$$

II.B) Interaction entre le fluide en écoulement et le tube vibrant

II.B.1) Ecoulement incompressible : $\text{div } \vec{v} = 0$

Soit, en négligeant la courbure du tube (au 1^{er} ordre) : $\frac{dv}{dy} = 0$: $v(M)$ uniforme.

II.B.2) Dans le cadre d'un écoulement parfait, la force exercée par le tube sur le fluide est localement normale au tube, i.e. dirigée selon $\vec{Z}$.

II.B.3) Forces s'exerçant sur la particule de fluide dans (R') :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Poids } \delta m \vec{g} = \rho s dy \vec{g} \\ * \text{ Forces de pression : } - \overrightarrow{\text{grad}} P \delta V = - \overrightarrow{\text{grad}} P (s dy) \\ * \text{ Forces d'inertie } \delta \vec{F}_{i_e} \text{ et } \delta \vec{F}_{i_c} \\ * \delta \vec{F}(T \rightarrow F) \end{array} \right.$$

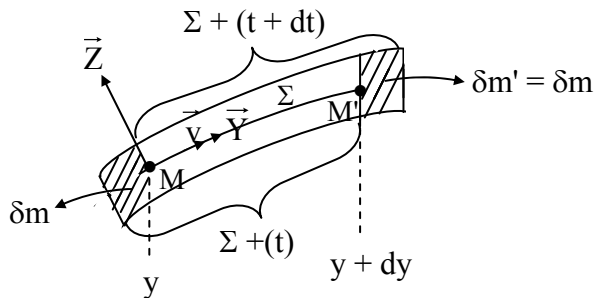
Enoncé en fin de document.

Rem. : $\vec{\Omega}(R'/R) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{Z}$, avec $\alpha \approx \frac{\partial z}{\partial y}$, ce qui justifie l'expression de $\vec{a}_c$ donnée par l'énoncé.

$$\text{II.B.4.) } * \delta \vec{F}_{i_e} = -\delta m \vec{a}_c = -\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{Z}$$

$$* \delta \vec{F}_{i_c} = -\delta m \vec{a}_c = 2 \delta m \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} v \vec{Z}$$

II.B.5)



$$\begin{cases} \delta \vec{p}^*(t) = \delta \vec{p}(t) = \delta m v \vec{Y} \\ \delta \vec{p}^*(t+dt) = \delta \vec{p}(t+dt) + \delta m' v \vec{Y}' \end{cases}$$

Avec $\delta \vec{p}(t) = \delta \vec{p}(t+dt)$ (régime permanent dans (R')).

De plus :

$$\vec{Y} = \cos \alpha \vec{y} + \sin \alpha \vec{Z} \approx \vec{y} + \alpha \vec{Z}$$

$$\vec{Y}' = \cos \alpha' \vec{y} + \sin \alpha' \vec{Z} \approx \vec{y} + \alpha' \vec{Z}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{Y}' - \vec{Y} &\approx (\alpha' - \alpha) \vec{Z} = (\alpha' - \alpha) [\cos \alpha \vec{Z} - \sin \alpha \vec{Y}] \\ &\approx (\alpha' - \alpha) \vec{Z} \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \alpha \end{aligned}$$

$$\approx \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right] \vec{Z}$$

$$\approx dy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \vec{Z}$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{p}^*) = \frac{\delta \vec{p}^*(t+dt) - \delta \vec{p}^*(t)}{dt} \approx \frac{\delta m}{dt} v dy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \vec{Z}$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{p}^*) = D_m v dy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \vec{Z}$$

Enoncé en fin de document.

II.B.6) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la particule de fluide dans (R'), on obtient :

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{p}^*) = \delta m \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P \delta V + \delta \vec{F}_{T \rightarrow F} + \delta \vec{F}_{i_e} + \delta \vec{F}_{i_c}$$

Avec $P = P(y)$ et $\vec{Z} \cdot \vec{Z} = \cos \alpha \approx 1$ au 1^{er} ordre, on déduit par projection sur $\vec{Z}$:

$$D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \vec{Z} \approx -\rho s dy \vec{Z} + \overbrace{\delta \vec{F}_{T \rightarrow F}}^{-\delta \vec{F}_{F \rightarrow T}} - \rho s dy \left[2 v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] \vec{Z}$$

Soit finalement, puisque $\rho s v = D_m$:

$$(2) \quad \delta \vec{F}_{F \rightarrow T} = - \left[g + \rho s \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) + D_m \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \right] dy \vec{Z}$$

II.B.7) a) Origine des 4 termes

- * Poids du fluide
- * Effets de $\vec{a}_e$ (accélération verticale du tronçon de tube)
- * Effet de $\vec{a}_c$ (rotation dans (R) du tronçon de tube)
- * Variation de l'orientation de l'écoulement du fluide, en raison de la courbure du tube

b) Entre t et $t + dt$, le tronçon a tourné ($\alpha = \frac{\partial z}{\partial y}$ a varié), donc les molécules de fluide ont changé de direction de déplacement dans (R), d'où une force du tube sur le fluide opposée à $\delta \vec{F}_{F \rightarrow T}$.

II.C) Etude des vibrations du tube en présence d'un écoulement

II.C.1) Pour le tube au repos :

$$\delta \vec{F}_{0(F \rightarrow T)} = -\rho s g dy \vec{Z}$$

Comme le tube au repos parcouru par l'écoulement de fluide est confondu avec l'axe horizontal Oy :

$$\delta \vec{F}_{0(F \rightarrow T)} \approx \vec{0} \quad (\text{poids de la particule de fluide négligé})$$

II.C.2) On reprend l'équation du mouvement d'une tranche de tube (fluide non compris) comprise entre y et $y + dy$, dans (R) galiléen :

$$\delta m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{T}_g + \vec{T}_d + \delta \vec{F}_{(F \rightarrow T)}$$

En projection sur $\vec{Z}$, on obtient donc :

Enoncé en fin de document.

$$\underbrace{\delta m}_{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy - \left[\rho s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + D_m \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \right] dy$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - K_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 K_2 D_m \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\mu + \rho s}{T_0 - v D_m} \\ K_2 = \frac{1}{T_0 - v D_m} \end{cases}$$

II.3.C) a) En injectant dans l'équation aux dérivées partielles précédentes une solution $\underline{z}(y,t) = \underline{G}(y)e^{j\omega t}$, on obtient :

$$\underline{G}''(y) + K_1 \omega^2 \underline{G}(y) - 2 K_2 D_m j \omega \underline{G}'(y) = 0$$

Soit, en ordonnant les termes :

$$\underline{G}''(y) - 2 K_2 D_m j \omega \underline{G}'(y) + K_1 \omega^2 \underline{G}(y) = 0$$

$$\Delta' = (K_2 D_m j \omega)^2 - K_1 \omega^2 = -(K_1 + K_2^2 D_m^2) \omega^2 < 0$$

Racines de l'équation caractéristique :

$$r = K_2 D_m j \omega \pm j \sqrt{-\Delta'}$$

Posons

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{K_2 D_m \omega} \\ \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{-\Delta'}} = \frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2} \omega} \end{cases}$$

Alors :

$$r = j \left(\frac{1}{\delta_1} \pm \frac{1}{\delta_2} \right)$$

et :

$$\underline{G}(y) = e^{j \frac{y}{\delta_1}} \left[\underline{A} e^{j \frac{y}{\delta_2}} + \underline{B} e^{-j \frac{y}{\delta_2}} \right]$$

Rem. : * $[K_2] = \left[\frac{1}{F} \right]$, donc $\left[\frac{1}{K_2 D_m \omega} \right] = \left[\frac{F}{m} \tau^2 \right] = [L]$, ce qui assure que δ_1 est bien une longueur.

Enoncé en fin de document.

$$* \left[\frac{K_2^2 D_m^2}{K_1} \right] = \left[\frac{K_2 D_m^2}{\mu K_2} \right] = \left[\frac{K_2 D_m^2}{\mu} \right] = \left[K_2 \frac{m^2}{\tau^2} \times \frac{L}{m} \right] = \left[K_2 m \frac{L}{\tau^2} \right] = \left[\frac{mL}{F \tau^2} \right],$$

ce qui assure que K_1 a la même dimension que $K_2^2 D_m^2$, et donc l'homogénéité de l'expression donnant δ_2 .

b) Conditions aux limites :

$$* \underline{G}(y=0) = 0 \Rightarrow \underline{B} = -\underline{A}, \text{ et :}$$

$$\underline{G}(y) = 2 j \underline{A} e^{j \frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{y}{\delta_2}\right)$$

$$* \underline{G}(y=L) = 0 \Rightarrow \frac{L}{\delta_2} = n\pi, \text{ donc :}$$

$$\underline{G}(y) = 2 j \underline{A} e^{j \frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$$\text{avec :} \quad \sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2} w_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow$$

$$w_n = \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2}}$$

Rem. : Si $\begin{cases} D_m = 0, K_1 = \frac{\mu}{T_0} = \frac{1}{C^2} \\ l = 0 \end{cases}$, on retrouve les pulsations en l'absence d'écoulement.

II.C.4) a) Si $D_m = 0$, $\rho \neq 0$, l'équation (3) redevient une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - K_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

La propagation se fait alors à la célérité : $C' = \frac{1}{\sqrt{K_1}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu'}}$, si $\mu' = \mu + \rho s$ est la masse linéique de l'ensemble tube + eau contenue.

b) Pour le fondamental :

$$w_1 = \frac{\pi}{L \sqrt{K_1}} = 2 \pi f \Rightarrow \frac{1}{L^2 K_1} = 4 f^2 = \frac{1}{L^2} \frac{T_0}{\mu'}$$

D'où :

$$T_0 = 4 f^2 L^2 \mu'$$

A.N. : $T_0 = 195 \text{ N}$

c) Pour $D_m = 0$: $\delta_1 \rightarrow \infty$, $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{K_1} w_1} = \frac{\pi}{L}$ d'après II.C.3)a) :

$$z(y,t) = 2 j A \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{j w_1 t}$$

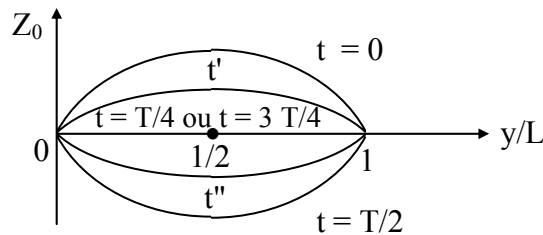
Enoncé en fin de document.

avec :
$$z\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 \cos w_1 t \Rightarrow 2 jA = Z_0$$

donc :

$$z(y, t) = Z_0 \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) \cos(w_1 t)$$

d) 2 points symétriques par rapport à B vibrent en phase avec la même amplitude.



II.C.5) Pour $D_m \neq 0$ et vibrations sur le mode fondamental :

$$z(y) = 2 jA e^{j \frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) e^{j w_1 t}$$

avec

$$w_1 = \frac{\Pi}{L} \frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2}} = 2 \Pi f$$

Par ailleurs :

$$z\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 e^{j w_1 t} = 2 jA e^{j \frac{y}{2 \delta_1}} e^{j w_1 t} \Rightarrow 2 jA = Z_0 e^{-j \frac{y}{2 \delta_1}}$$

D'où :

$$z(y, t) = Z_0 e^{j \frac{1}{\delta_1} \left(y - \frac{L}{2}\right)} \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) e^{j w_1 t}$$

Et en notations réelles :

$$z(y, t) = Z_0 \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) \cos \left[w_1 t + \frac{1}{\delta_1} \left(y - \frac{L}{2}\right) \right]$$

Donc :

$$K = \frac{1}{\delta_1} = K_2 D_m w_1 = K_2 D_M (2 \Pi f)$$

II.C.6) a) Raisonnons avec $D_m > 0$

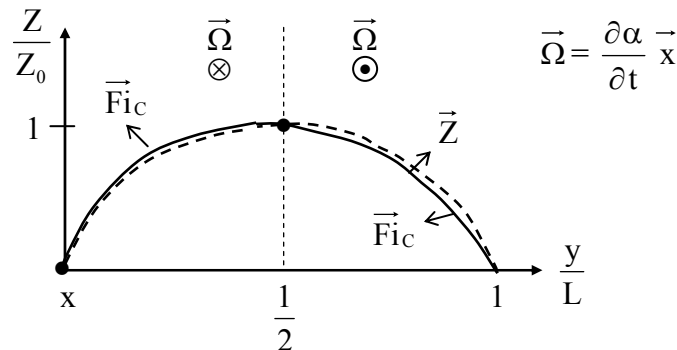
* Pour $y < \frac{L}{2}$: le tube est en retard par rapport au mouvement qu'il avait lorsque $D_m = 0$.

* Pour $y > \frac{L}{2}$: il est en avance.

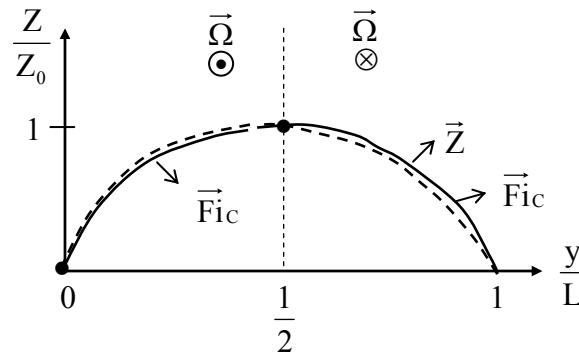
Enoncé en fin de document.

b) Pour $KL \ll 2\Pi$:

* Pour $t \in]0, \frac{T}{4}[$ (mouvement du tube « descendant ») :



* Pour $t \in]\frac{3T}{4}, T[$ (mouvement du tube « montant ») :



c) Par rapport au cas $D_m = 0$, on tient compte de $\vec{F}_{ic}$ de la question II.B.4), dirigée selon $\vec{Z}$ (orthogonale au tube). Son sens dépend du signe de $\Omega = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ ($\Omega < 0 \Rightarrow \vec{F}_{ic}$ selon $+\vec{Z}$).

II.C.7) a) Pour les points A et C :

$$Z_1 = Z_0 \sin \frac{\Pi}{4} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}} = 0,71 \text{ mm}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \varphi_C = K \left(\frac{3L}{4} - \frac{L}{2} \right) \\ \varphi_A = K \left(\frac{L}{4} - \frac{L}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \varphi = \varphi_C - \varphi_A = K \frac{L}{2} = \Pi K_2 D_m f L$$

$$\text{c) Avec } K_2 = \frac{1}{4 f^2 L^2 \mu'} : \quad \varphi = \frac{\Pi D_m}{4 f L \mu'} \quad \text{est proportionnel à } D_m$$

A.N. : $\varphi = 0,258 D_m$

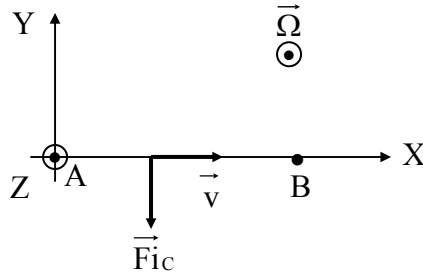
Enoncé en fin de document.

II.D) Autre géométrie de débitmètre à effet Coriolis : le tube en U

II.D.1) En l'absence d'écoulement, le plan (0xy) est plan de symétrie, donc :

$$y_B(t) = y_E(t), \forall t$$

II.D.2) * Pour $\Omega > 0$, branche AC : la force de Coriolis a la direction et le sens de $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$, donc dirigée selon $-\vec{Y}$:



* Pour $\Omega > 0$, branche FD : $\vec{v}$ est cette fois selon $-\vec{X}$, donc $\vec{F}_{ic}$ selon $+\vec{Y}$.

Pour $\Omega < 0$, ces résultats sont inversés.

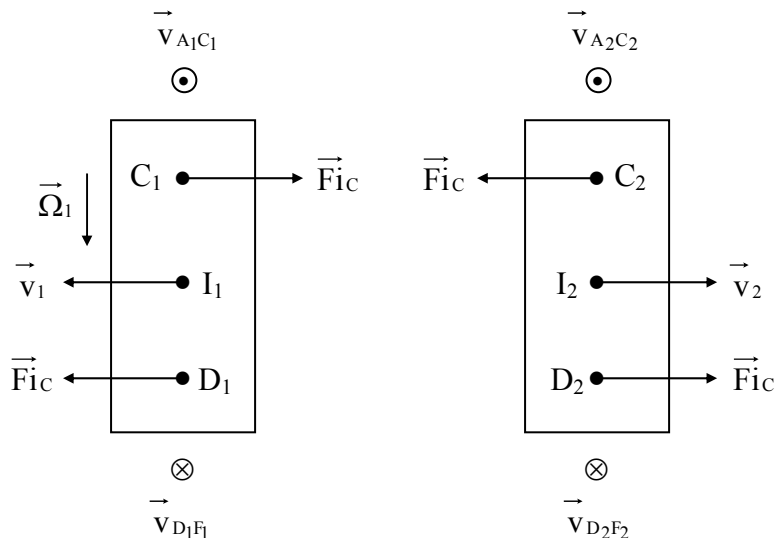
II.D.3) * Sur la branche CD : $\vec{\Omega} // \text{tube}$, donc $\vec{F}_{ic}$ y est nulle.

* Sur les branches AC et DF, les forces de Coriolis sont opposées, donc la branche CD est soumise à un couple de forces oscillantes et oscille autour de l'axe 0X.

II.D.4) Les mouvements de B et E dans le référentiel (R') lié à I sont alors en opposition de phase.

II.D.5) * Les mouvements des deux branches doivent être en opposition de phase pour que les capteurs (qui mesurent la séparation entre les 2 tubes) voient une amplitude maximale du mouvement.

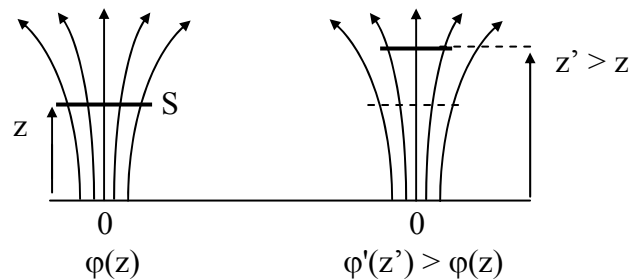
* Schéma



Partie III : Etude d'un capteur de vitesse

III.A) Principe de fonctionnement du capteur

III.A.1) Comme $\vec{B}$ est à flux conservatif, ϕ ne dépend pas de la surface s'appuyant sur la bobine, on peut donc prendre la surface du disque (pour une spire). Ce flux ϕ ($\phi = N\varphi$) dépend donc de z et diminue avec z , compte tenu de l'incurvation et de la diminution de B lorsque z augmente.



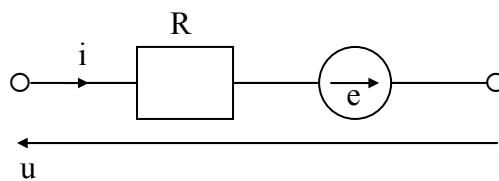
III.A.2) Les vibrations du tube font osciller la bobine, qui, parcouru par un flux $\phi(t)$ non permanent, va être le siège d'une fem induite :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

III.A.3) a) ARQS : $I(M,t) = i(t)$ (négliger la propagation d'une onde de courant entre A et B)

Validité : $AB \ll \lambda = c\tau$ (τ temps caractéristique de variation de $i(t)$).

b) Schéma électrique équivalent : $u = Ri - e$



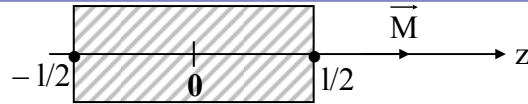
$$\text{III.A.4) } \begin{cases} e = - \frac{d\phi}{dt} \text{ (loi de Faraday)} \\ \phi = N\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = + N \frac{d\varphi}{dt} + Ri \approx N \frac{d\varphi}{dt}} \quad \text{en négligeant la résistance de la bobine}$$

$$\text{III.A.5) } \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{d\varphi}{dz} \Rightarrow \boxed{u = N v \frac{d\varphi}{dz}}$$

Enoncé en fin de document.

III.B.1)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \vec{z}$$

$$\text{En } z = \frac{l}{2} : \begin{cases} \theta_2 = \frac{\pi}{2} \\ \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\mu_0 M}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}} = 0,33 \text{ T}$$

Il s'agit d'un champ très intense, bien supérieur aux champs obtenus à l'aide de bobines « usuelles », de l'ordre de 10^{-4} T (solénoïde infini, $i = 0,1$ A, $n = 1000$ spires/n : $B = \mu_0 n i = 4 \pi \cdot 10^{-5}$ T).

III.B.2) On a :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} \\ \cos\theta_2 = \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} \end{cases} \quad (\forall \text{ position de M !})$$

D'où :

$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} \right]$$

III.B.3) On a : $B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} f(z)$

Donc : $\varphi \approx \pi R^2 B(z)$

et : $u = N \pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} f'(z)$

La réponse maximale du capteur correspond donc au maximum de $|f'(z)|$ donc à

$$z = d = 5 \text{ mm}.$$

III.C) Etude de la tension aux bornes de la bobine

III.C.1) $\phi = N\varphi$

$$\varphi = \iint_{\text{spire}} B_z(r, z) dS = \int_{r=0}^R \left[B(z) - \frac{r^2}{4} B''(z) \right] 2 \pi r dr = 2 \pi \left[\frac{R^2}{2} B(z) - \frac{R^4}{16} B''(z) \right]$$

Enoncé en fin de document.

D'où :

$$\phi = N \Pi R^2 \left[B(z) - \frac{R^2}{8} B''(z) \right]$$

III.C.2) Avec
$$\begin{cases} B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} f(z) \\ \frac{R^2}{8} B''(z) = \frac{R^2}{8} \frac{\mu_0 M}{2} f''(z) \end{cases}$$

Donc, avec $R = 2 \text{ mm}$: $\frac{R^2}{8} = \frac{1}{2} \text{ mm}^2$.

Ainsi :

$$\phi(z) = N \Pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} \underbrace{\left[f(z) - \frac{1}{2} f''(z) \right]}_{g(z)}$$

Au voisinage de $z = d = 5 \text{ mm}$, $g(z)$ est une droite de pente : $g'(z) = 0,7 \text{ mm}^{-1}$.

III.C.3) On a : $u = v \frac{d\phi}{dz}$, avec :

$$\frac{d\phi}{dz} = N \Pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} g(z) = -3 \cdot 10^{-4} \text{ Wbmm}^{-1}$$

III.C.4) Aux points A et C : $V_1 = w Z_1 = 2 \Pi f Z_1$, avec $Z_1 = 0,7 \text{ mm}$

Donc :

$$U_0 = V_1 \left| \frac{d\phi}{dz} \right| = 2 \Pi f Z_1 \left| \frac{d\phi}{dz} \right|$$

A.N. : $U_0 = 0,11 \text{ V}$

III.C.5) a) Approximations principales

* Négliger la résistance R de la bobine, ce qui conduit à surévaluer le coefficient de proportionnalité entre u et v (en valeur absolue, soit $\left| \frac{d\phi}{dz} \right|$).

* Linéariser $g(z)$ au voisinage de $z = d$, comme $|g'(z)| < |g'(d)|$ pour z voisin de d , cette approximation conduit également à surévaluer ce coefficient.

b) C'est le déphasage entre A et C qui permet d'accéder au débit (question II.C.7) et non l'amplitude des mouvements, donc il n'est pas nécessaire de connaître ce coefficient avec exactitude.

Partie IV : Filtrage du signal et mesure du déphasage

IV.A.1) * Signaux de fréquence inférieure à $f = 80$ Hz : rayonnement du réseau électrique à $f' = 50$ Hz.

* Signaux de fréquence supérieure à f : harmoniques du rayonnement précédent, harmoniques de vibrations du tube.

IV.A.2) * Pour réduire l'amplitude de ces parasites : filtre passe-bande accordé sur la fréquence f .

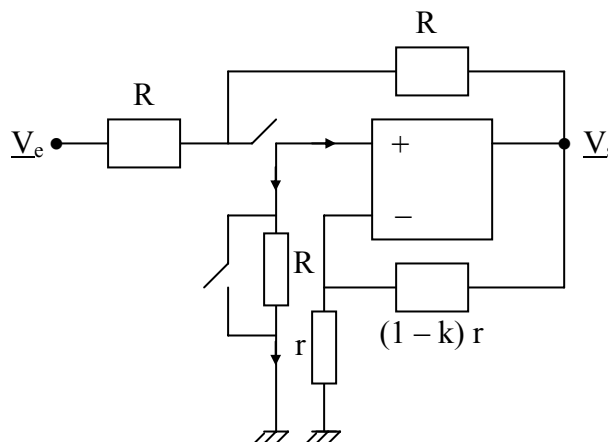
* Etablissons l'expression de $\underline{H}(j\omega)$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \underline{V}^+ &= \frac{\underline{Y}_3 \underline{V}_p}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \\ \bullet \underline{V}^- &= \frac{r}{r + (k-1)r} \underline{V}_s = \frac{\underline{V}_s}{k} \\ \bullet \underline{V}_p &= \frac{\underline{Y}_2 \underline{V}_e + \underline{Y}_3 \underline{V}^+ + \underline{Y}_1 \underline{V}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \end{aligned} \right\} \underline{V}^+ = \underline{V}^- \Rightarrow \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \underline{V}_p = \frac{\underline{V}_s}{k}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où :} \quad & \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \left[\frac{\underline{Y}_2 \underline{V}_e + \frac{\underline{Y}_3}{k} \underline{V}_s + \underline{Y}_1 \underline{V}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \right] = \frac{\underline{V}_s}{k} \\ \Rightarrow & \underline{V}_s [(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) - \underline{Y}_3^2 - k\underline{Y}_1 \underline{Y}_3] = k\underline{Y}_2 \underline{Y}_3 \underline{V}_s \\ \Rightarrow & \underline{H} = \frac{k\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_4 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) + \underline{Y}_3 (\underline{Y}_2 + (1-k) \underline{Y}_1)} \end{aligned}$$

IV.A.3) $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{R}$ $\underline{Y}_3 = j\omega$ $\underline{Y}_4 = \frac{1}{R} + j\omega$

* Schéma « basse fréquence » ($\omega \rightarrow \infty$)



Alors : $\underline{V}^+ = 0 = \underline{V}^- \Rightarrow \underline{V}_s = 0$