



## RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



## VARIABLES ALEATOIRES

## REELLES DISCRETES

---

---

## VARIABLES ALEATOIRES REELLES DISCRETES

---

---

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé et  $X$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

**DEFINITION** : On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle (abrégié VAR) si pour tout réel  $x$ , l'ensemble  $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$  est un événement, c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{T}$ .

Il est équivalent de dire : pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\}$  est un événement.

**Remarque** : Si  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ , toute application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  est une VAR.

**Notations** : Si  $A$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ , on notera

$(X \in A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$ . C'est en fait l'ensemble des antécédents par  $X$  des éléments de  $A$ .

Cas particuliers

$(X = a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\} = (X \in \{a\})$ , où  $a$  est un réel donné.

$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\} = (X \in ]-\infty, a])$ , où  $a$  est un réel donné.

$(a \leq X < b) = \{\omega \in \Omega / a \leq X(\omega) < b\} = (X \in [a, b[)$ , où  $a$  et  $b$  sont des réels donnés.

etc...

$X(\Omega)$  sera, comme pour les applications réelles, l'ensemble des images par  $X$  des éléments de  $\Omega$ , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

### VARIABLES DISCRETES

**DEFINITION** : Soit  $X$  une VAR de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète (en abrégé VARD) si l'ensemble  $X(\Omega)$  est dénombrable (fini ou non).

## 2 Variables aléatoires discrètes

**Notations :** Si  $X(\Omega)$  est fini, on écrira  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  où  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Si  $X(\Omega)$  est infini dénombrable, on écrira

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  où  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$

### LOI DE PROBABILITE D'UNE VARD

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé et  $X$  une VARD de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

Notons  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  où  $I$  désigne l'ensemble des indices ; donc  $I$  sera  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ou  $\mathbb{N}^*$  en général.

**DEFINITION :** On appelle loi de probabilité de  $X$  la donnée de  $\{(x_i, P(X = x_i)), i \in I\}$ . C'est donc la donnée des couples des valeurs prises par  $X$  et des probabilités correspondantes.

### Propriétés d'une loi de probabilité d'une VARD

- $\forall x_i \in X(\Omega), P(X = x_i) \geq 0$ .
- $\{(X = x_i), i \in I\}$  est un système complet d'événements. Donc

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

### Caractérisation d'une loi de probabilité d'une VARD

**THEOREME :** Soit  $A = \{x_i, i \in I\}$  une partie dénombrable de  $\mathbb{R}$  et une application  $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\sum_{i \in I} f(x_i) = 1$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé ; il existe une VARD  $X : \Omega \rightarrow A$  telle que :  $\forall i \in I, f(x_i) = P(X = x_i)$ .

### FONCTION DE REPARTITION

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé et une VARD  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, (X \leq x)$  est un événement ; sa probabilité existe donc.

**DEFINITION :** On appelle fonction de répartition de  $X$  l'application  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$ .

On remarque que :

$$P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = \sum_{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x} P(\{\omega\})$$

### PROPRIETES D' UNE FONCTION DE REPARTITION D' UNE VARD

- $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$
- $F$  est croissante
- $F$  est en escalier
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

- **Continuité**

Pour  $\alpha \notin X(\Omega)$ ,  $F$  est continue en  $\alpha$ .

Pour  $\alpha \in X(\Omega)$ ,  $F$  est continue à droite, discontinue à gauche.

**Caractérisation d'une fonction de répartition**

Soit  $F$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  possédant les propriétés suivantes :  $F$  est croissante au sens large sur  $\mathbb{R}$ ,

il existe une suite de réels  $(a_i)$ ,  $i \in I$  (en général  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$  ou  $\mathbb{N}^*$  ou très rarement  $\mathbb{Z}$ ), croissante strictement, telle que  $F$  soit en escalier pour la suite  $(a_i)$ ,  $i \in I$  ( $F$  est constante sur  $[a_i, a_{i+1}[$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Alors  $F$  est la fonction de répartition d'une VARD d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ .

- **Détermination de la loi d'une VARD par la fonction de répartition :**

Dans les conditions du théorème précédent, on a :

$$X(\Omega) = \{a_i, i \in I\} \text{ et } P(X = a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} F(x) - \lim_{x \rightarrow a_i^-} F(x).$$

**FONCTION D'UNE VARD**

Soit  $X$  une VARD de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  et  $g$  une application définie sur  $X(\Omega)$  (au moins), alors  $Y = g \circ X$  est une VARD sur  $\Omega$ , notée  $g(X)$ .

**SOMME ET PRODUIT DE VARD**

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des VARD de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  et  $X_1 \times \dots \times X_n$  sont des VARD de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

---

**LOIS DISCRETES CLASSIQUES**

---

On supposera donné l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ .

**VARIABLE CERTAINE**

**DEFINITION :**  $X$  est une variable certaine si l'application  $X$  est constante, donc s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) = a$ ; ce qui veut dire que  $X(\Omega) = \{a\}$ .

**VARIABLE QUASI-CERTAINE**

**DEFINITION :**  $X$  est une variable certaine si et seulement s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $P(X = a) = 1$

**VARIABLE UNIFORME**

**DEFINITION :**  $X$  est une variable uniforme discrète s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et si } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_k) = \frac{1}{n}.$$

**Terminologie :** Si  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on dira que  $X$  suit la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$  ou  $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ .

**VARIABLE DE BERNOULLI**

**DEFINITION :**  $X$  est une variable de Bernoulli si  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et s'il existe un nombre réel  $p \in ]0, 1[$  tel que  $P(X = 1) = p$ .

Alors  $P(X = 0) = 1 - p$ , car  $(X = 1) = \overline{(X = 0)}$ .

**Terminologie :** On dira souvent que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  et on écrira  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  ou  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ .

**Cas général :** On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à 2 issues : succès, échec ; la probabilité du succès étant  $p \in ]0, 1[$ .

**VARIABLE BINOMIALE**

**DEFINITION :**  $X$  est une variable binomiale s'il existe un nombre réel  $p \in ]0, 1[$  et un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On effectue, de manière indépendante les unes des autres,  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et on note  $X$  la VARD égale au nombre de succès. Alors  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

**Remarque :** des tirages avec remise peuvent être considérés comme la répétition, de manière indépendante, d'une même épreuve de Bernoulli.

**VARIABLE HYPERGEOMETRIQUE**

**DEFINITION :**  $X$  est une variable hypergéométrique s'il existe un entier non nul  $n$ , un entier non nul  $N$ ,  $n \leq N$ , un réel  $p \in ]0, 1[$  tels que :

$Np \in \mathbb{N}^*, X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$  et

$$\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On vérifie que  $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$  (C'est la formule de Vandermonde).

On note  $q = 1 - p$ ,  $N_1 = Np$ ,  $N_2 = N(1 - p)$  (donc la connaissance de  $N_1$  et  $N$  détermine celle de  $p$ ). On dira souvent que  $X$  suit la loi hypergéométrique de paramètres  $N, n, p$  et on écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ .

$$X(\Omega) = [\text{Max}(0, n - N_2), \text{Min}(n, N_1)]$$

**Cas général :** On a une urne composée de boules indiscernables au toucher, divisée en deux catégories : une catégorie  $U_1$  constituée de  $N_1$  boules et une catégorie  $U_2$  constituée de  $N_2$  boules. On pose  $N = N_1 + N_2$  et  $p = \frac{N_1}{N}$ .

On tire au hasard et sans remise  $n$  boules de l'urne et on considère la variable  $X$  égale au nombre de boules de  $U_1$  obtenues. Alors  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$