



RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



PROBABILITES

CLASSIQUES

**PROBABILITES DES
EVENEMENTS**

NOTIONS D'EVENEMENTS

DEFINITIONS : Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne dépend que du hasard.

On appelle univers associé à une expérience aléatoire l'ensemble, noté Ω , de tous les résultats possibles.

Quelques exemples classiques d'univers

Lorsque l'on jette une pièce de monnaie on pourra prendre pour univers : $\Omega = \{P, F\}$.

Lorsque l'on jette un dé à 6 faces, on pourra prendre pour univers : $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Terminologie : Les éléments e_k de Ω s'appellent les éventualités.

Lorsqu'on lance 3 dés normaux identiques. On a deux possibilités :

- On les lance l'un après l'autre, et on peut prendre $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$.
- On les lance en même temps. On peut considérer, sans changer l'expérience que les dés sont différenciables (couleurs différentes ou qu'on les lance en fait successivement) : on pourra prendre encore $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$

DEFINITION : Un événement est une partie de l'univers.

Il est constitué d'un certain nombre (peut-être infini) d'éventualités. Soit A un événement ; A est inclus dans Ω , et si $A = \{e_1, \dots, e_k \dots\}$, on peut dire que A est la réunion des singletons $\{e_k\}$. $A = \bigcup_{e_i \in A} \{e_i\}$. Dès qu'une

éventualité qui compose A est réalisée, A est lui-même réalisé.

Evénements particuliers

$\emptyset$ ne comporte aucune éventualité, il ne peut pas se réaliser, c'est l'événement impossible.

Ω est l'événement certain, car, quand on effectue l'expérience, une éventualité apparaît, donc Ω est réalisé.

2 Probabilités des évènements

Le singleton $\{e_k\}$ est un évènement réduit à une éventualité ; c'est un évènement élémentaire.

ALGEBRE (OU TRIBU) DES EVENEMENTS

DEFINITION : Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. On appelle ensemble des évènements associés à cette expérience, toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $\Omega \in \mathcal{T}$ (Ω est un évènement)
- (2) $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} \in \mathcal{T}$ ($\bar{A}$ est l'évènement contraire de A , constitué de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A , noté aussi $\Omega \setminus A$)
- (3) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$

Terminologie : une telle partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle une tribu ou une σ -algèbre.

On a les propriétés suivantes :

- (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$
- (b) Pour toute suite (B_n) d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{T}$
- (c) $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{T}$

THEOREME : Si les singletons sont des évènements et si Ω est fini ou dénombrable, la tribu des évènements est $\mathcal{P}(\Omega)$.

DEFINITION : On appelle espace probabilisable associé à une expérience aléatoire la donnée de l'univers Ω et d'une tribu $\mathcal{T}$ des évènements.

Nous l'écrivons $(\Omega, \mathcal{T})$.

OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

Soit A et B deux évènements.

- L'évènement $A \cap B$ représente la réalisation simultanée de A et de B .

Quand $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.

Les évènements élémentaires correspondant à 2 éventualités différentes sont incompatibles.

- L'évènement $\bar{A}$, constitué des éventualités de Ω qui ne sont pas dans A , s'appelle l'évènement contraire de A . Du point de vue ensembliste, c'est le complémentaire de A dans Ω .

A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

- L'évènement $A \cup B$ représente la réalisation d'au moins un de ces 2 évènements. Il n'est pas exclu qu'il y ait des éventualités communes à A et B .
- L'évènement $A \setminus B$ (noté aussi $A - B$) représente la réalisation de A , mais pas celle de B ; on peut donc écrire $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Règles opératoires :

Pour tous évènements A, B, C , on a les règles suivantes (qui sont les règles de calcul sur les sous-ensembles) :

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$A \cap A = A \cup A = A$$

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cap B = B \cap A \quad \text{ce sont les commutativités}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \emptyset = A \quad ; \quad A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \quad ;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \quad \text{Ce sont les associativités.}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ce sont les distributivités d'une opération sur l'autre.

$$A \cup (A \cap B) = A \quad ; \quad A \cap (A \cup B) = A \quad ; \quad \text{lois de Morgan.}$$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (très utiles). Ces formules se généralisent à une famille quelconque (finie ou infinie) d'événements.

Soit $((A_i), i \in J)$ une famille d'événements (J est l'ensemble des indices ; J pourra être $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$, ou une partie non vide de $\mathbb{N}$).

$$\bigcup_{k \in J} A_k = \bigcap_{k \in J} \overline{A_k} \quad ; \quad \bigcap_{k \in J} A_k = \bigcup_{k \in J} \overline{A_k}.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. J a la signification précédente.

DEFINITION : On appelle système complet d'événements, toute famille $(A_i), i \in J$ finie ou dénombrable d'événements, formant une partition de Ω , c'est-à-dire vérifiant :

$$(1) \quad \forall (i, j) \in J^2, i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$(2) \quad \forall i \in J, A_i \neq \emptyset.$$

$$(3) \quad \bigcup_{i \in J} A_i = \Omega$$

Remarque : si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, La famille constituée par tous les événements élémentaires de Ω forme un système complet d'événements.

Application : Soit B un événement et $(A_i), i \in J$ un système complet d'événements : $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) = \bigcup_{i \in J} (A_i \cap B).$

Remarque : En général J sera inclus dans $\mathbb{N}$ mais il n'est pas interdit que ce soit une partie de $\mathbb{Z}$.

PROBABILITES DES EVENEMENTS

DEFINITION : Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application, notée P , de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$1) \quad \forall A \in \mathcal{T}, P(A) \geq 0$$

$$2) \quad P(\Omega) = 1$$

$$3) \quad \text{Soit } (A_i)_{i \in I \subset \mathbb{N}, I \text{ infini}}, 2 \text{ à } 2 \text{ incompatibles, alors}$$

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.