

Une amélioration de la méthode du point moyen

Dans ce problème, a et b sont deux réels donnés, avec $a < b$. On note $c = \frac{a+b}{2}$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. On pourra noter Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé Oxy , et A, B, C les points de Γ d'abscisses respectives a, b, c .

- Question de cours : rappeler en quoi consiste l'approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode du trapèze, quelle est son interprétation géométrique, et quel est un majorant (en valeur absolue) de l'erreur commise dans cette approximation. [S]

- (a) Montrer que pour tout x de $[a, b]$, $|f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)| \leq \frac{M_2}{2}(x - c)^2$. [S]

- (b) En déduire $\left| \int_a^b f(x) dx - (b - a)f(c) \right| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)^3$.
On appelle "règle du point-moyen" l'approximation $\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(c)$. [S]

- (c) Donner une interprétation géométrique de la règle du point-moyen.

Déduire des questions (1) et (2) un encadrement de l'intégrale de f sur $[a, b]$ selon que l'application f est convexe ou concave sur ce segment. [S]

- (d) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout k de $\{0, \dots, n - 1\}$ on note $c_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b - a}{n}$.

Majorer l'erreur (en valeur absolue) dans : $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$. [S]

- On pose $J(f) = \int_a^b f(x) dx - (b - a)f(c) - \frac{(b - a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$

- (a) Calculer $J(f)$ quand : a) $f(x) \equiv 1$ b) $f(x) \equiv x$ c) $f(x) \equiv x^2$ d) $f(x) \equiv x^3$. [S]

- (b) En déduire $J(f)$ quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. [S]

- Soit $g : I = [-\omega, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ une application impaire et de classe $\mathcal{C}^5$, avec $\omega > 0$ fixé.

Soit N_5 un majorant de $|g^{(5)}(t)|$ sur I . Soit u un élément donné de I .

- (a) Calculer l'intégrale $K(u) = \int_0^u (u - t)^2(u^2 + 2ut - t^2) dt$. [S]

- (b) Prouver l'égalité $g(u) = ug'(0) + \frac{u^3}{6}g^{(3)}(0) + \frac{1}{24} \int_0^u (u - t)^4 g^{(5)} dt$. [S]

- (c) Etablir $g''(u) = ug^{(3)}(0) + \frac{1}{2} \int_0^u (u - t)^2 g^{(5)} dt$. [S]

- (d) En déduire que $\left| g(u) - ug'(0) - \frac{u^2}{6}g''(u) \right| \leq \frac{7N_5}{360}|u|^5$. [S]

- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$ et on note $M_4 = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

En posant $g(u) = \int_{c-u}^{c+u} f(x) dx$ déduire de ce qui précède la majoration :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b - a)f(c) - \frac{(b - a)^2}{24}(f'(b) - f'(a)) \right| \leq \frac{7M_4}{5760}(b - a)^5$$

Retrouver à cette occasion les résultats de la question (3). [S]

- Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout k de $\{0, \dots, n - 1\}$ on note $c_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b - a}{n}$.

Donner une majoration de l'erreur (en valeur absolue) dans l'approximation :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) + \frac{(b - a)^2}{24n^2}(f'(b) - f'(a)). \text{ Any comment ? [S]}$$