



Un peu de géométrie du triangle

Le plan euclidien orienté est identifié à $\mathbb{C}$. Par exemple, si a est un nombre complexe, et plutôt que d'évoquer le point A d'affixe a , on parlera simplement du point a .

On va prouver des propriétés géométriques du triangle, invariantes dans toute similitude. On ne perd donc aucune généralité à considérer un triangle T inscrit dans le cercle unité $\mathcal{U} = \{z, |z| = 1\}$, c'est-à-dire défini par trois points distincts a, b, c tels que $|a| = |b| = |c| = 1$.

Uniquement pour les figures on prendra $a = \exp(-\frac{11i\pi}{12})$, $b = \exp(-\frac{i\pi}{12})$, et $c = \exp(\frac{5i\pi}{8})$.

I. La droite d'Euler

1. On pose $s = a + b$ et $h = a + b + c$. Montrer que $0, s, h, c$ forment un parallélogramme. En déduire que les hauteurs du triangle T se coupent au point h . [S]
2. Uniquement dans cette question, on suppose $a + b + c = 0$.
Montrer que $ab + ac + bc = 0$ et en déduire que a, b, c sont les trois racines cubiques d'un même nombre complexe de module 1. Qu'en déduit-on concernant le triangle T ? [S]
3. Soit m l'équibarycentre de a, b, c .
Montrer que les points $0, m, h$ sont alignés (et confondus $\Leftrightarrow T$ est équilatéral). [S]
4. Si T n'est pas équilatéral, la droite E contenant $0, m, h$ est appelée *droite d'Euler* de T .
Montrer qu'alors : $z \in E \Leftrightarrow \bar{h}z - h\bar{z} = 0$ (c'est donc l'équation de E). [S]
5. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

II. Deux propriétés classiques de l'orthocentre

1. Identifier les symétriques de h par rapport aux milieux des cotés du triangle T et vérifier que ce sont éléments du cercle circonscrit $\mathcal{U}$. [S]
2. Montrer que la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite (ab) est l'application qui à tout point z associe le point $z' = -ab\bar{z} + a + b$.
Caractériser de manière analogue la projection orthogonale sur la droite (ab) . [S]
3. Prouver que les symétriques de h par rapport aux cotés de T sont sur $\mathcal{U}$. [S]
4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

III. Le triangle orthique

On note α, β, γ les projetés respectifs du point h sur les droites $(bc), (ca), (ab)$ (c'est-à-dire les pieds des hauteurs au triangle T issues respectivement des sommets a, b, c .)

On dit que le triangle $H = \alpha\beta\gamma$ est le *triangle orthique* de T .

On supposera ici que le triangle T n'est pas rectangle, pour que α, β, γ soient distincts.

1. Montrer que $\alpha = \frac{1}{2}(h - \bar{a}bc)$ (utiliser (II.2)). Donner les expressions de β et γ . [S]
2. Dédurre de ces expressions de α, β, γ que les droites $(0a), (0b)$ et $(0c)$ sont respectivement orthogonales aux droites $(\beta\gamma), (\alpha\gamma)$, et $(\alpha\beta)$. [S]



3. Montrer que la droite (γc) est bissectrice des droites $(\gamma \alpha)$ et $(\gamma \beta)$.

Indication : pour établir $(\widehat{\gamma \alpha, \gamma c}) = (\widehat{\gamma c, \gamma \beta}) [\pi]$, on utilisera en le justifiant le fait que a, γ, α, c sont cocycliques, ainsi que a, γ, h, β .

En déduire que si les angles de T sont aigus, le triangle orthique est la trace d'un faisceau lumineux ou à la trajectoire d'une boule de billard ;-) inscrite dans le triangle T . [S]

4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

IV. Le cercle d'Euler, ou cercle des neuf points

On appelle *cercle d'Euler* du triangle T le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit aux milieux des cotés de T (et le triangle joignant ces trois points est appelé le *triangle médian* de T .)

1. Montrer que $\mathcal{C}$ a pour centre $k = \frac{1}{2} h$ et pour rayon $\frac{1}{2}$.

Par quelle homothétie de rapport positif le cercle $\mathcal{C}$ se déduit-il de $\mathcal{U}$? [S]

2. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ contient (outre les milieux des cotés de T .)

(a) Les milieux des segments $[ha]$, $[hb]$ $[hc]$. [S]

(b) Les points α, β, γ , pieds des hauteurs menées de a, b, c au triangle T . [S]

Ces propriétés justifient que $\mathcal{C}$ soit appelé *cercle des neuf points* du triangle T .

3. Faire une figure montrant $\mathcal{U}, T, \mathcal{C}$ et les trois triangles dont $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit.

4. Dans cette question, T est supposé non rectangle. Le point h est donc distinct de a, b, c .

(a) Quels sont les orthocentres des triangles hab , hbc et hac ? [S]

(b) En déduire que ces trois triangles ont le même cercle d'Euler que le triangle T . [S]

(c) Indiquer comment les cercles circonscrits à hab , hbc et hac se déduisent de $\mathcal{U}$. [S]

(d) Montrer que le résultat de IV.4.c est aussi une conséquence de celui de II.3. [S]

(e) Faire une figure illustrant le résultat de cette question.

V. Une propriété caractéristique du triangle orthique

Dans cette partie, on suppose que tous les angles du triangle T sont aigus.

On note u (resp. v, w) un point quelconque du segment $[ab]$ (resp. $[ac]$, $[bc]$).

Soit Δ le triangle de sommets u, v, w . Il est donc inscrit dans le triangle T .

On va montrer son périmètre $\psi(\Delta)$ est minimum quand Δ est le triangle orthique de T .

1. On note x (resp. y) le symétrique de u par rapport à la droite (ca) (resp. (cb)).

Le segment $[xy]$ coupe le segment $[ac]$ en u' et le segment $[bc]$ en u'' .

(a) Montrer que si u est fixé, le périmètre de Δ est minimum quand $v = u'$ et $w = v'$. [S]

(b) Montrer que la valeur de ce minimum est $|b - a| |c - u|$. [S]

2. Comme dans les parties III et IV, on note α, β, γ les pieds des hauteurs au triangle T issues respectivement des sommets a, b, c .

(a) Montrer que si $u = \alpha$, alors $u' = \beta$ et $u'' = \gamma$. [S]

(b) En déduire le triangle orthique est le triangle de périmètre minimum inscrit dans T . [S]