



# Table des matières

|    |                                                    |   |
|----|----------------------------------------------------|---|
| 1. | Rectification d'un arc du plan . . . . .           | 2 |
| 2. | Abscisse curviligne . . . . .                      | 3 |
| 3. | Formules de Frenet dans le plan . . . . .          | 4 |
| 4. | Calcul du rayon et du centre de courbure . . . . . | 5 |

# Propriétés métriques des arcs du plan

## 1. Rectification d'un arc du plan

**Définition** (*Ligne polygonale inscrite dans un arc*)

Soit  $(I = [a, b], f)$  un arc paramétré continu du plan.

Soit  $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  une subdivision du segment  $[a, b]$ .

On dit que  $M(t_0), M(t_1), \dots, M(t_n)$  forment une *ligne polygonale inscrite* dans l'arc  $(I, f)$ .

La quantité  $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$  est appelé *longueur* de cette ligne polygonale.

**Définition** (*Arc rectifiable*)

On dit que l'arc paramétré  $(I = [a, b], f)$  est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs  $L_\sigma$  des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.

On appelle alors *longueur* de cet arc la quantité  $L = \sup(L_\sigma)$ , le "sup" étant pris sur l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans  $(I, f)$ .

**Proposition**

Soit  $(I = [a, b], f)$  un arc paramétré du plan, de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Alors cet arc est rectifiable et sa longueur est égale à :  $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$ .

**Invariance par changement de paramétrage**

Soit  $(I = [a, b], f)$  et  $(J = [c, d], g)$  deux paramétrages admissibles du même arc de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Il existe donc un difféomorphisme  $\varphi$  de  $J$  sur  $I$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , tel que  $g = f \circ \varphi$ .

Supposons par exemple que  $\varphi$  soit croissante (donc  $\varphi(c) = a$  et  $\varphi(d) = b$ ) :

$$\text{Alors } \int_c^d \|g'(u)\| du = \int_c^d \|f'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

De la même manière, si  $\varphi$  est décroissante (donc  $\varphi(c) = b$  et  $\varphi(d) = a$ ) :

$$\text{Alors } \int_c^d \|g'(u)\| du = - \int_c^d \|f'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Les arcs  $(I, f)$  et  $(J, g)$  ont donc la même longueur, ce qui est rassurant et montre que la longueur d'un arc paramétré est en fait une notion géométrique : on pourra donc parler de la longueur du support de l'arc, indépendamment de la représentation paramétrique utilisée.

**Cas particuliers**

– La longueur de l'arc  $t \in [a, b] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$  est  $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ .

– On considère l'arc de classe  $\mathcal{C}^1$  défini par  $y = f(x)$ , avec  $a \leq x \leq b$ .

On a  $M(x) = (x, f(x))$  donc  $M'(x) = (1, f'(x))$  : la longueur de l'arc est  $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ .