



Table des matières

I	Produit scalaire	2
I.1	Définition et premières propriétés	2
I.2	Exemples classiques	3
I.3	Norme et distance associées à un produit scalaire	3
I.4	Relations entre le produit scalaire et la norme associée	4
II	Orthogonalité	4
II.1	Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux	4
II.2	Produits scalaires et familles orthonormales	5
II.3	Orthogonal d'une partie de E	7
II.4	Projections orthogonales dans un espace euclidien	9
III	Isométries et matrices orthogonales	10
III.1	Automorphismes orthogonaux	10
III.2	Matrices orthogonales	11
III.3	Les groupes $SO(E)$ et $SO(n)$	13



I Produit scalaire

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I.1 Définition et premières propriétés

Définition (Produit scalaire)

On dit que l'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* si :

◇ (a) $\forall (u, u', v, v') \in E^4, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v)$: on dit que f est *linéaire à gauche*.

$f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v')$: on dit que f est *linéaire à droite*.

◇ (b) $\forall (u, v) \in E^2, f(v, u) = f(u, v)$: on dit que f est *symétrique*.

◇ (c) $\forall u \in E, f(u, u) \in \mathbb{R}^+$: on dit que f est *positive*.

◇ (d) $\forall u \in E, f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$: on dit que f est *définie*.

Définition (Espace euclidien)

Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien réel*.

Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarques

- La propriété (a) s'énonce en disant que f est *bilinéaire*.
- Un produit scalaire sur E est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive.
- Si le caractère symétrique de f est établi, la linéarité à droite équivaut à la linéarité à gauche : le point (a) de la définition peut alors être simplifié.
- Plutôt que de noter $f(u, v)$, on note souvent $\langle u, v \rangle$, ou $u \cdot v$, ou $(u | v)$.

Avec la notation $(\cdot | \cdot)$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :

$\forall (u, u', v, v') \in E^4, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (\alpha u + \beta u' | v) = \alpha (u | v) + \beta (u' | v) \\ (u | \alpha v + \beta v') = \alpha (u | v) + \beta (u | v') \\ (v | u) = (u | v) \quad ; \quad (u | u) \geq 0 \quad ; \quad (u | u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0} \end{cases}$$

- Si E est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel F de E est encore euclidien, avec la restriction du produit scalaire.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E .

Alors $\forall (u, v) \in E^2, (u | v)^2 \leq (u | u)(v | v)$.

De plus, il y a égalité $\Leftrightarrow u$ et v sont liés.

I.2 Exemples classiques

Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Soient $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$.

L'application : $(u, v) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$ est le *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$.

“Cauchy-Schwarz” s’écrit alors : $\left\{ \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right., \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2$.

Si on note $[u]$ la matrice-colonne associée à tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, alors $(u | v) = {}^t[u] [v]$.

Un produit scalaire entre applications continues

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l’espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

L'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t) g(t) dt$ est un produit scalaire.

“Cauchy-Schwarz” s’écrit alors : $\forall (f, g) \in E^2, \left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt$

Un produit scalaire entre applications continues périodiques

Soit E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues et 2π -périodiques.

L'application $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$ est un produit scalaire sur E .

I.3 Norme et distance associées à un produit scalaire

Proposition (Norme euclidienne associée à un produit scalaire)

Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E . On pose : $\forall u \in E, \|u\| = \sqrt{(u | u)}$.

Cette application vérifie :

- ◊ $\forall u \in E, \|u\| \geq 0$, et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$.
- ◊ $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.
- ◊ $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (*inégalité triangulaire*, ou de *Minkowski*.)

On exprime ces propriétés en disant que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une *norme* sur E .

On l'appelle *norme euclidienne* associée au (ou déduite du) produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

Remarques

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit maintenant : $\forall (u, v) \in E^2, |(u | v)| \leq \|u\| \|v\|$.
- Pour tous vecteurs u et v de E , on a : $\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u \pm v\|$.
- Avec nos deux premiers exemples de produit scalaire, les normes associées s'écrivent :

Sur $\mathbb{R}^n$: $\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$.

Définition (Distance associée à un produit scalaire)

Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E , et soit $u \mapsto \|u\|$ la norme associée.

L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \quad \begin{cases} d(u, v) = d(v, u) ; & d(u, v) \geq 0 ; & d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) & \text{(inégalité triangulaire)} \end{cases}$$

On exprime ces propriétés en disant que l'application d est une *distance*, dite associée à la norme euclidienne, et donc au produit scalaire.

I.4 Relations entre le produit scalaire et la norme associée

Proposition (Identités du parallélogramme et de polarisation)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ on a : } \|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta (u | v) + \beta^2 \|v\|^2.$$

$$\text{En particulier, } \begin{cases} \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u | v) + \|v\|^2 \\ \|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2(u | v) + \|v\|^2 \end{cases}$$

$$\text{Par addition, on en déduit : } \forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Cette égalité est connue sous le nom d'*identité du parallélogramme*.

On a également les *identités de polarisation*, qui permettent d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme euclidienne :

$$\forall (u, v) \in E^2, (u | v) = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

II Orthogonalité

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et de la norme associée.

II.1 Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux

Définition

Un vecteur u de E est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.

Deux vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* si $(u | v) = 0$.

Remarques

- Ces notions dépendent évidemment du produit scalaire utilisé sur E .
Si on en change, les vecteurs qui étaient orthogonaux ne le sont donc plus nécessairement.
- Si $u \neq \vec{0}$, les vecteurs $\pm \frac{u}{\|u\|}$ sont unitaires, et ce sont les seuls de la droite $\mathbb{R}u$.
- La définition de l'orthogonalité est symétrique car $(v | u) = (u | v)$.

- Le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
A fortiori, le seul vecteur u qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est $u = \vec{0}$.

Définition (Familles orthogonales ou orthonormales)

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si les u_i sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite *orthonormale*.

Définition (Bases et repères orthonormaux)

Soit $(e) = e_1, \dots, e_n$ une base de E .
Si c'est une famille orthonormale, on dit que c'est une *base orthonormale* de E .
Un repère cartésien $(\Omega, (e))$ est dit *orthonormal* si la base (e) est orthonormale.

Remarques et propriétés

- La famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow \forall (i, j) \in I^2, (u_i | u_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker).
- Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, c'est une famille libre.
C'est le cas en particulier d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ orthonormale.
Si $\dim E = n \geq 1$, une famille orthonormale de n vecteurs est une base orthonormale.
- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale, pour le produit scalaire canonique.
- Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , muni d'une base $(e) = e_1, \dots, e_n$.
Pour tous vecteurs $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $v = \sum_{k=1}^n y_k e_k$ de E , on pose $(u | v) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.
On définit ainsi un produit scalaire sur E , pour lequel la base (e) est orthonormale.
- Si la famille $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$ est orthogonale, alors $\left\| \sum_{k=1}^p u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|u_k\|^2$ (Relation de Pythagore.)
La réciproque n'est vraie que si $p = 2$. Ainsi $(u | v) = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

II.2 Produits scalaires et familles orthonormales

Proposition (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Dans tout espace vectoriel euclidien E , il y a des bases orthonormales.
Plus précisément, soit $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E .

Alors il existe une et une seule base orthonormale $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que :

- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{Vect} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = \text{Vect} \{e_1, \dots, e_k\}$
- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, (\varepsilon_k | e_k) > 0$

Cette base orthonormale (ε) est obtenue de la manière suivante :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{2, \dots, n\}, \varepsilon_k = \frac{1}{\|u_k\|} u_k \quad \text{où} \quad u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j | e_k) \varepsilon_j$$