



Table des matières

I	Le corps des nombres réels	2
I.1	Le groupe $(\mathbb{R}, +)$	2
I.2	L'anneau $(\mathbb{R}, +, x)$	2
I.3	Le corps $(\mathbb{R}, +, x)$	3
I.4	Nombres rationnels ou irrationnels	3
I.5	Relation d'ordre	4
I.6	Exposants entiers relatifs	4
I.7	Intervalles de $\mathbb{R}$	5
I.8	Droite numérique achevée	5
I.9	Identités remarquables	6
I.10	Valeur absolue et distance	7
I.11	Quelques inégalités classiques	8
II	Borne supérieure, borne inférieure	9
II.1	Axiome de la borne supérieure	9
II.2	Propriétés de la borne Sup et la borne Inf	10
II.3	Congruences, partie entière	10
II.4	Valeurs approchées, densité de $\mathbb{Q}$	11
II.5	Exposants rationnels	12

I Le corps des nombres réels

I.1 Le groupe $(\mathbb{R}, +)$

On admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathbb{R}$, contenant l'ensemble $\mathbb{N}$, dont les éléments sont appelés *nombres réels*, muni de deux opérations $+$ (addition) et $\times$ (produit, noté par juxtaposition : xy plutôt que $x \times y$) et d'une relation d'ordre total $\leq$, qui "étendent" toutes trois celles de $\mathbb{N}$, et qui vérifient les propriétés P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , et P_5 , que nous allons passer en revue.

P_1 : Propriétés de l'addition

- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x$
- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) = (x + y) + z$.
- L'entier 0 est élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x$.
- Tout réel x possède un unique "opposé" y vérifiant : $x + y = 0$. Il est noté $y = -x$.

On exprime les propriétés P_1 en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un *groupe commutatif*.

Remarques et notations

- Pour tous réels x et y , on note $y - x$ plutôt que $y + (-x)$.
On définit ainsi une nouvelle opération sur $\mathbb{R}$ (*soustraction*) qui ne présente que très peu d'intérêt : elle n'est ni commutative, ni associative, et il n'y a pas d'élément neutre.
- On vérifie la propriété : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, -(x + y) = -x - y$.
- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A = \{-x, x \in A\}$.
- On note $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont appelés *entiers relatifs*. On pose $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- La commutativité et l'associativité de la loi $+$ font qu'on peut envisager $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sans parenthèses et sans se préoccuper de l'ordre des termes. Une telle somme est notée $\sum_{k=1}^n x_k$.

I.2 L'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$

P_2 : Propriétés du produit

- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = yx$.
- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x(yz) = (xy)z$.
- Distributivité par rapport à l'addition : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x(y + z) = xy + xz$.
- 1 est neutre pour le produit : $\forall x \in \mathbb{R}, x1 = x$.

On exprime les propriétés P_1 et P_2 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *anneau commutatif*.

Remarques

- $\forall x \in \mathbb{R}, x0 = 0$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x(-y) = (-x)y = -(xy)$.
- La commutativité et l'associativité de $\times$ font qu'on peut considérer un produit $x_1x_2 \dots x_n$ sans utiliser de parenthèses ni tenir compte de l'ordre des termes.

Un tel produit est noté $\prod_{k=1}^n x_k$.

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est *stable* pour les lois $+$ et $\times$: $\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2, n + p \in \mathbb{Z}$ et $np \in \mathbb{Z}$.

Muni des *restrictions* des lois de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ a lui-même une structure d'anneau commutatif.

Exposants entiers positifs

Pour tout x réel, on définit par récurrence les puissances x^n de x , avec $n \in \mathbb{N}$:

On pose : $x^0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n x$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^n = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.

On démontre par récurrence les propriétés suivantes :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad \begin{cases} (xy)^n = x^n y^n \\ x^n x^p = x^{n+p} \\ (x^n)^p = x^{np} \end{cases}$$

I.3 Le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$

On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des réels non nuls. Il contient $\mathbb{Z}^*$ et donc $\mathbb{N}^*$.

P_3 : Inversibilité des réels non nuls

$$\begin{cases} \text{Tout réel non nul } x \text{ possède un unique "inverse" } y, \text{ vérifiant } xy = 1. \\ \text{Ce réel est noté } y = x^{-1} \text{ ou } y = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1 , P_2 , P_3 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *corps commutatif*.

Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $xy \in \mathbb{R}^*$ et $(xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$, $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (y = 0)$.

On note habituellement : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, xy^{-1} = x \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$.

Une telle notation est rendue possible car le produit est une opération commutative.

I.4 Nombres rationnels ou irrationnels

Définition

- || On note $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$, et $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
 || Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés *nombres rationnels*.

Remarques

- L'ensemble $\mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{Z}$, est stable pour les lois $+$ et $\times$.
- Muni des restrictions de ces lois, il est lui-même un corps commutatif.
- En particulier l'inverse de tout élément de $\mathbb{Q}^*$ est encore dans $\mathbb{Q}^*$.

Définition

- || Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés *nombres irrationnels*.

I.5 Relation d'ordre

P_4 : Propriétés de la relation d'ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Compatibilité avec l'addition : } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z. \\ \text{Compatibilité avec le produit par un réel positif ou nul :} \\ \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y) \text{ et } (0 \leq z) \Rightarrow xz \leq yz. \end{array} \right.$$

On résume P_1 à P_4 en disant que $\mathbb{R}$ est un *corps commutatif totalement ordonné*.

Remarques et notations

- Toute partie minorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
- On note bien sûr, pour tous réels x et y : $\begin{cases} x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ et } (x \neq y) \\ x \geq y \Leftrightarrow y \leq x; \quad x > y \Leftrightarrow y < x \end{cases}$
- On pose $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{+*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.
On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{+*}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^{+*}$, et $\mathbb{Q}^+$.
- On pose $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$, $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^{-*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$.
On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{-*}$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^{-*}$, et $\mathbb{Q}^-$.
- Le tableau ci-après résume les *règles des signes*

x	≥ 0	≤ 0	≥ 0	> 0	< 0	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0
y	≥ 0	≤ 0	≤ 0	> 0	< 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
$x + y$	≥ 0	≤ 0	?	> 0	< 0	?	> 0	?	?	< 0
xy	≥ 0	≥ 0	≤ 0	> 0	> 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0

On démontre également les propriétés suivantes, pour tous réels x, y, z :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + z \leq y + z \Leftrightarrow x \leq y & x + z < y + z \Leftrightarrow x < y \\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x & x < y \Leftrightarrow -y < -x \\ x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 & x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \\ x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0 & x < 0 \Leftrightarrow x^{-1} < 0 \\ 0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1} & x < y < 0 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1} < 0 \\ (x \leq y \text{ et } z \leq 0) \Rightarrow xz \geq yz & x^2 \geq 0 \\ (x < y \text{ et } z > 0) \Rightarrow xz < yz & (x < y \text{ et } z < 0) \Rightarrow xz > yz \end{array} \right.$$

I.6 Exposants entiers relatifs

Pour tout réel non nul x , et tout entier relatif strictement négatif m , on pose $x^m = (x^{-m})^{-1}$.

On connaît donc maintenant le sens de x^m , pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et tout m de $\mathbb{Z}$.

Propriétés

$$\begin{array}{l} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ \forall (n, p) \in \mathbb{Z} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (xy)^n = x^n y^n, \quad x^n x^p = x^{n+p} \\ \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p} \quad (x^n)^p = x^{np} \end{array} \right.$$