



# Table des matières

|       |                                                   |    |
|-------|---------------------------------------------------|----|
| I     | Entiers naturels . . . . .                        | 2  |
| I.1   | L'ensemble $\mathbb{N}$ . . . . .                 | 2  |
| I.2   | Raisonnement par récurrence . . . . .             | 2  |
| I.3   | Somme et produit . . . . .                        | 3  |
| I.4   | Relation d'ordre et différence . . . . .          | 4  |
| I.5   | Division euclidienne . . . . .                    | 4  |
| I.6   | Pratique du raisonnement par récurrence . . . . . | 5  |
| II    | Ensembles finis . . . . .                         | 6  |
| II.1  | Cardinal d'un ensemble fini . . . . .             | 6  |
| II.2  | Propriétés des cardinaux . . . . .                | 8  |
| III   | Dénombrements . . . . .                           | 9  |
| III.1 | Applications entre ensembles finis . . . . .      | 9  |
| III.2 | Arrangements et combinaisons . . . . .            | 9  |
| III.3 | Binôme de Newton . . . . .                        | 10 |
| IV    | Ensembles dénombrables . . . . .                  | 11 |



# I Entiers naturels

## I.1 L'ensemble $\mathbb{N}$

Conformément au programme des classes préparatoires, l'ensemble  $\mathbb{N}$  est supposé connu, ainsi que ses propriétés (opérations  $+$  et  $\times$ , relation d'ordre).

Cependant, en voici une présentation minimale (ou presque) à partir de laquelle on pourrait retrouver toutes ses propriétés.

On admet l'existence d'un ensemble  $\mathbb{N}$ , dont les éléments sont appelés *entiers naturels*, tel que :

### a. Successeur d'un entier naturel

Il existe une application  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , appelée *succession*.

L'image par  $s$  d'un entier naturel  $n$  est appelée le *successeur* de  $n$ .

### b. Entier 0

Il existe un élément de  $\mathbb{N}$ , noté 0, qui n'a pas d'antécédent par  $s$ .

On note 1 le successeur de 0, 2 celui de 1, 3 celui de 2, etc.

On note  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$  : c'est l'ensemble des entiers naturels *non nuls*.

### c. Prédécesseur d'un entier naturel non nul

L'application  $s$  est une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N} - \{0\}$ .

Tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  est donc le successeur d'un unique  $m$  de  $\mathbb{N}$ , appelé le *prédécesseur* de  $n$ .

### d. Axiome de récurrence

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{N}$  telle que :  $0 \in A$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow s(n) \in A$ . Alors  $A = \mathbb{N}$ .

Autrement dit, si une partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie  $A$  est égale à  $\mathbb{N}$  tout entier.

Tout cela permet par exemple de définir une *addition* sur  $\mathbb{N}$ , de la manière suivante :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad m + 0 = m, \quad m + s(n) = s(m + n)$$

On constate que :  $\forall m \in \mathbb{N}, s(m) = m + 1$  (poser  $n = 0$  dans la définition précédente).

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $n - 1$  le prédécesseur de  $n$ . Ainsi  $m = n - 1 \Leftrightarrow n = m + 1 \dots$

L'axiome de récurrence s'écrit maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } A \text{ une partie de } \mathbb{N}, \text{ contenant } 0. \\ \text{On suppose que : } \forall n \in A, n + 1 \in A. \text{ Alors } A = \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

## I.2 Raisonnement par récurrence

Soit  $\mathcal{P}$  un prédicat, de référentiel  $\mathbb{N}$ .

Rappelons qu'on écrit  $\mathcal{P}(n)$  pour dire " $\mathcal{P}(n)$  est vraie".

### Récurrence simple (ou faible)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On suppose } \mathcal{P}(0) \text{ et, pour tout entier } n, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1). \\ \text{Alors, pour tout entier } n, \mathcal{P}(n). \end{array} \right.$$

Voici donc comment montrer qu'une propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tous les entiers naturels :

- On vérifie que l'entier 0 satisfait à la propriété : c'est le *pas initial* de la récurrence.
- On se **donne** ensuite un entier  $n$ , pour lequel on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.  
C'est l'*hypothèse de récurrence*.
- On démontre alors que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie (c'est le "*passage du rang  $n$  au rang  $n+1$* ").  
On exprime l'implication  $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  en disant que la propriété  $\mathcal{P}$  est *héréditaire*.
- On conclut en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier  $n$ .

### I.3 Somme et produit

Toutes les opérations sur  $\mathbb{N}$  peuvent être définies par récurrence (on l'a déjà vu pour l'addition).  
Leurs propriétés peuvent être établies de la même manière.

#### Addition

- La loi  $+$  est *associative* :  $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m + (n + p) = (m + n) + p$ .
- La loi  $+$  est *commutative* :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m + n = n + m$ .
- 0 est *élément neutre* :  $\forall n \in \mathbb{N}, n + 0 = n$  (cette propriété découle de la définition).
- Tout élément de  $\mathbb{N}$  est *régulier* :  $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m + p = n + p \Rightarrow m = n$ .
- $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m + n = 0 \Leftrightarrow m = n = 0$ .

#### Multiplication

On définit un *produit* sur  $\mathbb{N}$ , en posant :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} m0 = 0 \\ m(n+1) = mn + m \end{cases}$

Une récurrence montre que  $mn$  est défini pour tout couple  $(m, n)$ .

Toujours par récurrence, on peut alors vérifier les propriétés suivantes :

- La loi  $\times$  est *distributive* par rapport à la loi  $+$  :  
 $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m(n + p) = mp + mp$ .
- La loi  $\times$  est *associative* :  $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m(np) = (mn)p$ .
- La loi  $\times$  est *commutative* :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, mn = nm$ .
- Tout élément de  $\mathbb{N}^*$  est *régulier* :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in \mathbb{N}^*, mp = np \Rightarrow m = n$ .
- 1 est *élément neutre* :  $\forall n \in \mathbb{N}, n1 = n$ .

#### Factorielle

On définit  $n!$  (*factorielle  $n$* ) par  $0! = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n(n-1)!$ . Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \prod_{k=1}^n k$ .

#### Exponentiation

On définit la notation  $m^n$  :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m^0 = 1, m^{n+1} = m^n m$ .

On montre alors les propriétés suivantes par récurrence :

- $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3 : m^n m^p = m^{n+p}, (m^n)^p = m^{np}, (mn)^p = m^p n^p$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, n^1 = n, 1^n = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$  (mais par convention  $0^0 = 1$ ).

#### Remarques

$mn = 1 \Leftrightarrow m = n = 1; mn = 0 \Leftrightarrow (m = 0) \text{ ou } (n = 0)$ .

## I.4 Relation d'ordre et différence

### Définition

- On pose :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, m + p = n$ .  
 Les notations  $n \geq m$  et  $m \leq n$  sont bien sûr équivalentes.  
 On note  $m < n$  pour écrire :  $(m \leq n)$  et  $(m \neq n)$ .  
 Soit  $(m, n)$  dans  $\mathbb{N}^2$ . On pose :  $\llbracket m, n \rrbracket = \{p \in \mathbb{N}, m \leq p \leq n\}$ .

### Propriétés

- $\leq$  définit une relation d'ordre total sur  $\mathbb{N}$ .  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : m < n \Leftrightarrow m + 1 \leq n \Leftrightarrow m \leq n - 1$ .
- 0 est le minimum de  $\mathbb{N}$ .
- Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de  $\mathbb{N}$  possède un plus grand élément.
- La relation  $\leq$  est *compatible* avec les opérations  $+$  et  $\times$ , ce qui signifie :  
 $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N} : m \leq n \Rightarrow (m + p \leq n + p) \text{ et } (mp \leq np)$

### Soustraction

Soit  $(m, n)$  un couple d'entiers naturels, tels que  $m \leq n$ . L'entier  $p$  tel que  $m + p = n$  (unique par régularité) est appelé *différence* de  $n$  et de  $m$ , et on note  $p = n - m$ .

Cette notation généralise celle qui a été utilisée au début de ce chapitre pour définir le prédécesseur  $m = n - 1$  d'un entier naturel non nul  $n$ .

Cette "opération" n'est pas partout définie sur  $\mathbb{N}$  (l'entier  $p$  n'existe que si  $m \leq n$ ).

### Propriétés

On a (entre autres) les égalités suivantes, sous réserve que les différences existent dans  $\mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} \forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, (m - n) - p = m - (n + p). \text{ Cette quantité est notée } m - n - p. \\ \forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, (m - n) + p = m - (n - p). \text{ Cette quantité est notée } m - n + p. \\ \forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, (m + n) - p = m + (n - p). \text{ Cette quantité est notée } m + n - p. \end{cases}$$

## I.5 Division euclidienne

### Définition

- On dit que  $n$  *divise*  $m$  (ou que  $m$  est un *multiple* de  $n$ ) si :  $\exists q \in \mathbb{N}, m = nq$ .  
 On note alors  $n \mid m$ . On définit ainsi une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}$ .  
 Pour cette relation, 1 est le minimum de  $\mathbb{N}$ .

### Définition

- Soit  $(m, n)$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ .  
 Il existe un unique couple  $(q, r)$  de  $\mathbb{N}^2$  tel que :  $(m = nq + r)$  et  $(r \leq n - 1)$   
 Le passage du couple  $(m, n)$  au couple  $(q, r)$  s'appelle *division euclidienne* de  $m$  par  $n$ .  
 Dans cette division,  $m$  est le *dividende*,  $n$  le *diviseur*,  $q$  le *quotient*, et  $r$  le *reste*.

### Remarque

$n \mid m \Leftrightarrow (m = n = 0) \text{ ou } (n \neq 0 \text{ et le reste dans la division de } m \text{ par } n \text{ est nul}).$