

Quelques propriétés des fonctions harmoniques à deux variables

Dans ce problème, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Pour k dans $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ l'algèbre des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}$.

Soit f dans $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Le laplacien de f est l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par : $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
 f est dite *harmonique* si $\Delta f \equiv 0$. On note $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω .

I. Question de cours : le laplacien en polaires

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. On pose $\begin{cases} \mathcal{U} = \{(\rho, \theta), \rho > 0, -\pi < \theta < \pi\} \\ \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\} \end{cases}$

Soit f une application définie sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit F définie sur $\mathcal{U}$ par $F = f \circ \varphi$.

Pour tout point (x, y) de Ω , on a donc $f(x, y) = F(\rho, \theta)$ avec $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

1. Montrer que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{U}$ sur Ω . Préciser φ^{-1} . [S]
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω . L'application F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
Exprimer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de F . [S]
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω . L'application F est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$.
Exprimer Δf en fonction des dérivées partielles premières et secondes de F . [S]

II. Quelques exemples de fonctions harmoniques

Dans le reste du problème, il est demandé de ne pas chercher à utiliser les résultats de la partie I.

1. Dans cette question, Ω désigne l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que l'application $f : (x, y) \mapsto \arctan(y/x)$ est harmonique sur Ω . [S]
 - (b) Réciproquement, déterminer les applications f de $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $f(x, y) = \varphi(y/x)$ pour tout (x, y) de Ω . [S]
2. Dans cette question, Ω désigne l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On note $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
 - (a) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto \ln r(x, y)$ est harmonique sur Ω . [S]
 - (b) Réciproquement, déterminer les applications f de $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une application $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que : $\forall (x, y) \in \Omega, f(x, y) = \varphi(r(x, y))$. [S]

III. Opérations sur les fonctions harmoniques

1. Montrer que $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel mais pas une sous-algèbre de $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. [S]
2. Soit f un élément de $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R})$, avec $m \geq 3$. Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq m - 2$.
Soi g une application dérivée partielle d'ordre p de f . Montrer que g est harmonique.
Indication : utiliser une récurrence finie sur l'ordre de dérivation. [S]
3. Dans cette question, f, g, h sont des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
On suppose que l'application f est harmonique.
On suppose qu'on a les égalités $\frac{\partial g}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial h}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
 - (a) Montrer que les applications g et h sont harmoniques. [S]
 - (b) Montrer que F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ est harmonique. [S]
 - (c) Montrer que l'application gh est harmonique. [S]
 - (d) Soit φ une similitude affine de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $F = f \circ \varphi$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. [S]



IV. Fonctions polynomiales harmoniques

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des applications f définies par $f(x, y) = \sum_{p, q \geq 0} \lambda_{p, q} x^p y^q$, où les $\lambda_{p, q}$ sont réels (tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.)

L'ensemble $\mathcal{P}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, et les fonctions monômes $(x, y) \mapsto x^p y^q$ en constituent une base.

Pour tout m de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des fonctions polynomiales homogènes de degré m :

Autrement dit, $f \in \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \sum_{k=0}^m \lambda_k x^k y^{m-k}$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ est la somme directe de ses sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_m$.

On note $\mathcal{Y} = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynomiales harmoniques.

On note $\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y} \cap \mathcal{P}_m$ l'ensemble des fonctions polynomiales harmoniques homogènes de degré m .

Il est clair que $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}_m$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}_m$.

1. (a) Préciser une base et la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$, pour m dans $\mathbb{N}$. [S]

- (b) Indiquer la dimension et une base de $\mathcal{Y}_0$ et de $\mathcal{Y}_1$. [S]

- (c) Soit m un entier supérieur ou égal à 2 et f un élément de $\mathcal{P}_m$.

Il existe donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \sum_{k=0}^m \lambda_k x^k y^{m-k}$.

Indiquer les conditions sur les λ_k pour que f soit harmonique.

En considérant l'application qui à f associe (λ_0, λ_1) , montrer que $\dim \mathcal{Y}_m = 2$. [S]

- (d) Soit $m \geq 2$. On définit $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x + iy)^m = f(x, y) + ig(x, y)$.

Montrer que f et g forment une base de $\mathcal{Y}_m$.

Expliciter par exemple une base de $\mathcal{Y}_2$ et une base de $\mathcal{Y}_5$. [S]

2. Soit f dans $\mathcal{P}_m$. Si $m \geq 1$, vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{P}_{m-1}$.

Montrer que pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a l'égalité $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = mf(x, y)$. [S]

3. Soit m un entier strictement positif et p un élément de $\mathcal{Y}_m$.

Pour tout réel λ , et tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $h_\lambda(x, y) = xp(x, y) - \lambda(x^2 + y^2) \frac{\partial p}{\partial x}(x, y)$.

- (a) Vérifier que l'application h_λ est dans $\mathcal{P}_{m+1}$. [S]

- (b) Montrer que $\Delta h_\lambda = 2(1 - 2m\lambda) \frac{\partial p}{\partial x}$. [S]

- (c) En déduire : $\exists (h, g) \in \mathcal{Y}_{m+1} \times \mathcal{P}_{m-1}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xp(x, y) = h(x, y) + (x^2 + y^2)g(x, y)$.

Remarquer (sans reprendre les calculs précédents) qu'on arrive à une conclusion analogue en considérant l'application définie par $(x, y) \mapsto yp(x, y)$. [S]

4. Pour simplifier les notations, on note $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

- (a) Soit f dans $\mathcal{P}_2$. Montrer qu'il existe λ unique dans $\mathbb{R}$ tel que $h = f - \lambda r^2$ soit dans $\mathcal{Y}_2$. [S]

- (b) On se donne un entier $m \geq 2$ et f dans $\mathcal{P}_m$. Montrer $\exists (h, g) \in \mathcal{Y}_m \times \mathcal{P}_{m-2}$, $f = h + r^2 g$.

Indication : raisonner par récurrence sur m , en utilisant (IV 2) et (IV 3c).

En raisonnant sur les dimensions montrer que cette décomposition de f est unique. [S]

- (c) Soit m dans $\mathbb{N}$ et f dans $\mathcal{P}_m$. Montrer que f s'écrit de façon unique $f = \sum_{0 \leq k \leq m/2} r^{2k} h_{m-2k}$, où chaque h_{m-2k} est dans $\mathcal{Y}_{m-2k}$. Indication : récurrence sur m . [S]

Corrigé du problème

Question de cours : le laplacien en polaires

1. L'application φ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

On se donne (x, y) dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $(x \leq 0, y = 0)$.

Si on cherche ρ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et θ dans $] -\pi, \pi[$, alors on trouve :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x + \rho = 2\rho \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ y = 2\rho \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \frac{\theta}{2} = \frac{y}{x + \rho} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = 2 \arctan \frac{y}{x + \rho} \end{cases}$$

Ainsi φ est une bijection de $\mathcal{U}$ dans Ω , et les calculs précédents montrent que la bijection réciproque est donnée par $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Les deux applications $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \theta(x, y)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ (comme résultant d'opérations et de compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.)

Conclusion : l'application φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{U}$ sur Ω . [Q]

2. On différencie le changement de variables et on inverse le système obtenu :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\rho = \cos \theta dx + \sin \theta dy \\ d\theta = -\frac{\sin \theta}{\rho} dx + \frac{\cos \theta}{\rho} dy \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases} \quad [\text{Q}]$$

3. On interprète le résultat précédent comme des relations entre opérateurs de dérivation partielle.

$$\text{On écrit donc : } \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Pour calculer la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ on applique cet opérateur à $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\cos \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} \end{aligned}$$