

## Quelques propriétés de la cardioïde

On se place dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , muni de sa structure habituelle de plan euclidien orienté.

Dans tout le problème,  $a$  désigne un réel strictement positif.

On appelle *cardioïde* la courbe  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  dont une équation en polaires est  $\rho = a(1 + \cos \theta)$ .

### Première partie

1. Étudier et tracer la courbe  $\Gamma$ . On précisera l'angle polaire (dans le repère canonique) de la tangente au point de paramètre  $\theta$  de  $\Gamma$ . On indiquera en particulier quels sont les points à tangente horizontale ou verticale. [S]
2. (a) Montrer que pour tout réel  $\varphi$ , il y a exactement trois points  $M, N, P$  de  $\Gamma$  en lesquels la tangente à  $\Gamma$  a pour angle polaire  $\varphi$ . [S]  
(b) Déterminer le centre de gravité du triangle  $MNP$ . [S]  
(c) Déterminer l'aire du triangle  $MNP$ . [S]  
(d) Quand le point  $M$  décrit  $\Gamma$ , reconnaître la courbe décrite par le milieu  $I$  du segment  $NP$  (comment cette courbe se déduit-elle de  $\Gamma$ ?) [S]
3. Déterminer une représentation en polaires de la courbe  $\Gamma'$  décrite par la projection orthogonale  $N(\theta)$  de  $O$  sur la tangente à  $\Gamma$  en  $M(\theta)$ . Construire  $\Gamma'$ . [S]
4. Une droite variable  $\Delta$ , passant par  $O$ , rencontre  $\Gamma$  en deux points  $P$  et  $Q$  autres que  $O$ . On note  $A$  le point de coordonnées  $(2a, 0)$ .  
(a) Déterminer le lieu du barycentre  $J$  du triangle  $APQ$ . [S]  
(b) Déterminer le lieu du point d'intersection  $I$  des tangentes en  $P$  et  $Q$  à  $\Gamma$ . [S]
5. Soit  $(C)$  un cercle fixe de rayon  $a > 0$ . Un cercle mobile  $(C')$  de même rayon roule sans glisser sur  $(C)$ . Montrer que la trajectoire d'un point  $M$  de  $(C')$  est une cardioïde. [S]
6. On note  $A(\theta)$  le point d'angle polaire  $\theta$  d'un cercle de centre  $O$ .  
On considère la droite  $D_\theta$  passant par les points  $A(\theta)$  et  $A(2\theta)$ .  
Montrer que quand  $\theta$  varie,  $D_\theta$  reste tangente à une cardioïde que l'on déterminera. [S]

### Deuxième partie

1. Déterminer le centre de courbure au point de paramètre  $\theta = 0$  de  $\Gamma$ . [S]
2. On oriente  $\Gamma$  dans le sens des  $\theta$  croissants.  
(a) Déterminer une abscisse curviligne sur  $\Gamma$ , avec  $(0, 0)$  comme origine.  
Quelle est la longueur totale de la courbe  $\Gamma$ ? [S]  
(b) Préciser le repère de Frenet et la courbure au point de paramètre  $\theta$ . [S]  
(c) Montrer que l'ensemble des centres de courbure de  $\Gamma$  est une cardioïde, dont on indiquera par quelle transformation géométrique simple elle se déduit de  $\Gamma$ . [S]

### Troisième partie

1. Soit  $\mathcal{D}$  le domaine du plan intérieur à la cardioïde  $\Gamma$ .

On suppose que  $\mathcal{D}$  est recouvert d'une densité surfacique constante  $\mu > 0$ .

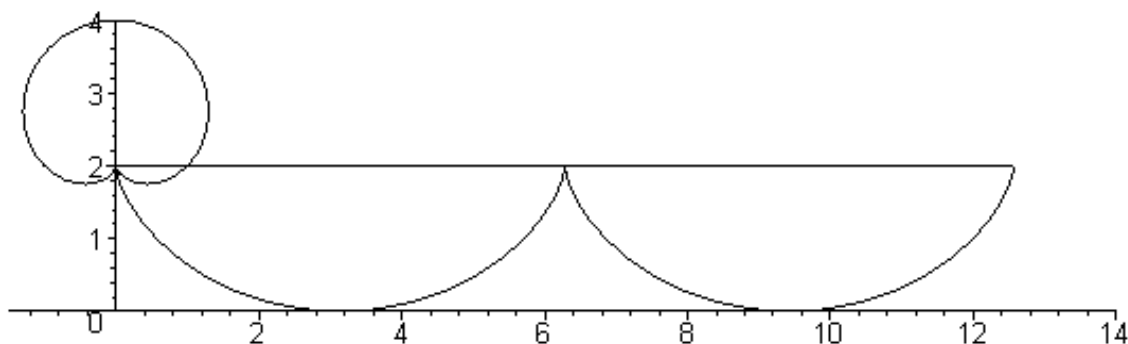
On note  $\mathcal{D}^+$  l'intersection de  $\mathcal{D}$  avec le demi-plan  $y \geq 0$ .

- Calculer l'aire de  $\mathcal{D}$ . [S]
  - Calculer le centre d'inertie de  $\mathcal{D}$  et celui de  $\mathcal{D}^+$ . [S]
  - Calculer les moments d'inertie de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $Ox$ , à  $Oy$ , à  $O$ . [S]
  - Calculer le volume qu'engendrerait  $\mathcal{D}$  par rotation autour de  $Ox$ . [S]
2. On suppose que  $\Gamma$  est recouvert d'une densité linéique constante  $\mu > 0$ .
- On note  $\Gamma^+$  l'intersection de  $\Gamma$  avec le demi-plan  $y \geq 0$ .
- Calculer le centre d'inertie de  $\Gamma$  et celui de  $\Gamma^+$ . [S]
  - Calculer les moments d'inertie de  $\Gamma$  par rapport à  $Ox$ , à  $Oy$ , à  $O$ . [S]
  - Calculer l'aire de la nappe qu'engendrerait  $\Gamma^+$  par rotation autour de  $Ox$ . [S]

3. On considère la cycloïde, d'équation  $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 + \cos(t) \end{cases}$ , pour  $t$  réel.

Chaque arche de cette cycloïde a pour longueur 8.

Sur le point  $(0, 2)$  de la cycloïde, on "pose" une cardioïde de longueur 8, comme indiqué :



On fait ensuite rouler la cardioïde sur la cycloïde, sans glisser. Montrer que, pendant ce mouvement, le point de rebroussement de la cardioïde décrit la droite  $y = 2$ . [S]

## Corrigé du problème

### Première partie

1. L'application  $\theta \mapsto \rho(\theta)$  est  $2\pi$ -périodique et paire. On peut donc limiter l'étude à  $[0, \pi]$  puis procéder à une symétrie par rapport à  $Ox$  pour obtenir toute la courbe.

La fonction  $\theta \mapsto \rho(\theta)$  reste strictement positive sur  $[0, \pi[$ . Elle s'annule en  $\theta = \pi$  ce qui indique un passage à l'origine avec une tangente horizontale. Compte tenu de la symétrie par rapport à  $Ox$ , l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

Notons  $V$  (resp.  $\varphi$ ) l'angle polaire de la tangente en  $M(\theta)$  dans le repère mobile (resp. dans le repère fixe). On sait que  $\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cotan\frac{\theta}{2} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ .

On en déduit  $V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ , puis  $\varphi = V + \theta = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ .

Le calcul précédent est encore valable si  $\theta = 0 \pmod{\pi}$ . En effet on a  $\rho'(0) = 0$  donc la tangente en  $M(0) = (2a, 0)$  est verticale, et pour  $\theta = \pi$  on sait que la tangente est horizontale.

- Les points à tangente horizontale sont caractérisés par  $\varphi = 0 \pmod{\pi}$  donc  $\theta = \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ .

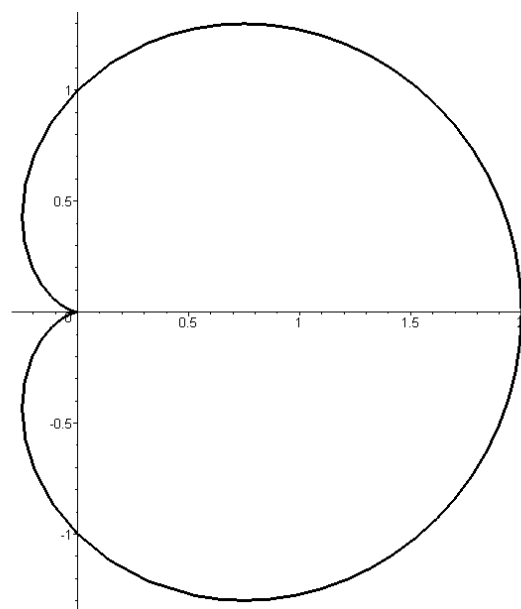
On trouve  $M(\pi) = (0, 0)$ ,  $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$  et  $M\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3a}{4}, -\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$ .

- Les points à tangente verticale sont caractérisés par  $\varphi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  donc par  $\theta = 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ .

On trouve  $M(0) = (2a, 0)$ ,  $M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a}{4}, -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ .

Voici le tableau de variation et le tracé (obtenu avec Maple, en choisissant  $a = 1$ ).

| $\theta$            | 0       | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $\pi$ |   |
|---------------------|---------|---------|---------|----------|-------|---|
| $\rho'(\theta)$     | 0       | -       | -       | -        | -     | 0 |
| $\rho(\theta)$      | 2a      | $3a/2$  | a       | $a/2$    | 0     |   |
| $\varphi \bmod \pi$ | $\pi/2$ | 0       | $\pi/4$ | $\pi/2$  | 0     |   |



[Q]

2. (a) L'angle polaire (dans le repère fixe) de la tangente en  $M(\theta)$  est  $\varphi = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ .

Fixer  $\varphi$  conduit à  $\frac{3\theta}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  puis à  $\theta = \frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ .

On obtient trois solutions modulo  $2\pi$  :  $\theta_1 = \frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}$ ,  $\theta_2 = \frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}$  et  $\theta_3 = \frac{2\varphi}{3} + \pi$ .

Pour tout angle  $\varphi$ , il y a donc toujours trois points distincts  $M, N, P$  de  $\Gamma$  en lesquels la tangente à  $\Gamma$  a pour angle polaire  $\varphi$ . [Q]

- (b) Notons  $\theta_1$ ,  $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}$  et  $\theta_3 = \theta_1 + \frac{4\pi}{3}$  les angles polaires des points  $M, N, P$ .

Les coordonnées du point  $M(\theta)$  sont 
$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta = \frac{a}{2}(2 \cos \theta + 1 + \cos 2\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta = \frac{a}{2}(2 \sin \theta + \sin 2\theta) \end{cases}$$

Pour chacun des angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , on a  $(e^{i\theta})^3 = \omega$ , avec  $\omega = e^{3i\theta_1}$ .

Ainsi les nombres complexes  $e^{i\theta_1}$ ,  $e^{i\theta_2}$  et  $e^{i\theta_3}$  sont solutions de  $z^3 - \omega = 0$ .

Leurs fonctions symétriques élémentaires vérifient donc  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ .

Il en découle  $\sigma_1 = \sum_k e^{i\theta_k} = 0$ , puis  $S_2 = \sum_k e^{2i\theta_k} = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$ .

On en déduit 
$$\begin{cases} \sum_k \cos \theta_k = \sum_k \sin \theta_k = 0 \\ \sum_k \cos 2\theta_k = \sum_k \sin 2\theta_k = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x(\theta_1) + x(\theta_2) + x(\theta_3) = \frac{3a}{2} \\ y(\theta_1) + y(\theta_2) + y(\theta_3) = 0 \end{cases}$$

Cela prouve que le centre de gravité du triangle  $MNP$  est toujours  $G\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ . [Q]

- (c) Les angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  vérifient  $\cos 3\theta = \cos 3\theta_1$  donc  $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \cos 3\theta_1 = 0$ .

On en déduit en particulier les relations suivantes :

- $\sigma_1 = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0$  (mais on le savait déjà.)
- $\sigma_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3 = -\frac{3}{4}$ .

L'aire du triangle  $MNP$  est  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})|$ .

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) &= \det(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) \\ &= \det(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) + \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) + \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \\ &= \rho(\theta_2)\rho(\theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_2) + \rho(\theta_3)\rho(\theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_3) + \rho(\theta_1)\rho(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\rho(\theta_2)\rho(\theta_3) + \rho(\theta_3)\rho(\theta_1) + \rho(\theta_1)\rho(\theta_2)) \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} ((1 + \cos \theta_2)(1 + \cos \theta_3) + (1 + \cos \theta_3)(1 + \cos \theta_1) + (1 + \cos \theta_1)(1 + \cos \theta_2)) \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} (3 + 2\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{9a^2\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

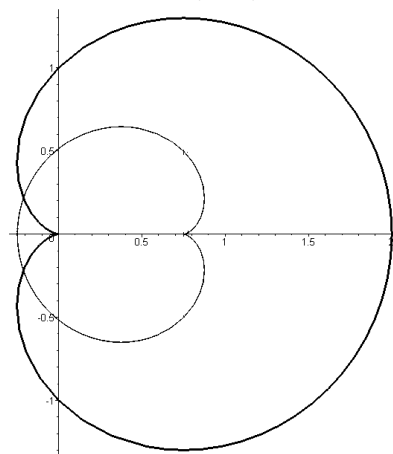
Conclusion : l'aire du triangle  $MNP$  est constante, égale à  $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$ . [Q]

- (d) On sait que le centre de gravité du triangle  $MNP$  est  $G\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ .

On a  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG}$   
 donc  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OG}$   
 puis  $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ .

Le point  $I$  se déduit donc de  $M$  par la composée de l'homothétie de centre  $O$  et de rayon  $-1/2$  puis de la translation de vecteur  $3\overrightarrow{OG}/2 = (3a/4, 0)$ .

La courbe décrite par  $I$  est donc encore une cardioïde, représentée ici (son point de rebroussement est en  $(3a/4, 0)$ .)



[Q]

3. La tangente à  $\Gamma$  en  $M(\theta)$  est dirigée par  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

La droite  $(ON)$  est donc dirigée par  $\vec{u}(\frac{3\theta}{2}) = (\sin \varphi, -\cos \varphi) = (\cos \frac{3\theta}{2}, \sin \frac{3\theta}{2})$ .

Ainsi il existe une fonction  $\lambda(\theta)$  telle que  $\overrightarrow{ON} = \lambda(\theta) \vec{u}(\frac{3\theta}{2})$

Il reste à écrire que  $(\overrightarrow{ON} \mid \overrightarrow{MN}) = 0$ , c'est-à-dire  $(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{ON}) = \|\overrightarrow{ON}\|^2$ .

Cela s'écrit  $\lambda(\theta)^2 = a(1 + \cos \theta) \lambda(\theta) (\vec{u}(\theta) \mid \vec{u}(\frac{3\theta}{2})) = a(1 + \cos \theta) \lambda(\theta) \cos \frac{\theta}{2}$ .

On trouve finalement  $\lambda(\theta) = a(1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} = 2a \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^3$ .

Remarque : on a simplifié par  $\lambda(\theta)$  mais on constate que le cas  $\lambda(\theta) = 0$  correspond à un point  $N$  à l'origine, c'est-à-dire à une tangente à  $\Gamma$  passant par 0. Or seule la tangente en  $M(\pi) = O$  à  $\Gamma$  passe par  $O$ . On constate d'ailleurs que pour  $\theta = \pi$ , la formule obtenue ci-dessus donne bien  $\lambda(\pi) = 0$ .

Ainsi, pour tout  $\theta$ ,  $\overrightarrow{ON} = 2a \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^3 \vec{u}(\frac{3\theta}{2}) = 2a \left( \cos \frac{\theta'}{3} \right)^3 \vec{u}(\theta')$  en posant  $\theta' = \frac{3\theta}{2}$ .

Cela signifie que le point  $N$  parcourt la courbe d'équation  $\rho = 2a \left( \cos \frac{\theta}{3} \right)^3$  en polaires.

L'application  $\theta \mapsto 2a \left( \cos \frac{\theta}{3} \right)^3$  est  $6\pi$ -périodique et paire. On peut donc réduire l'étude à  $[0, 3\pi]$  puis procéder à une symétrie par rapport à  $Ox$  (on obtient toute la courbe.)

On observe de plus que  $\rho(3\pi - \theta) = -\rho(\theta)$ . Cela signifie que les points  $M(\theta)$  et  $M(3\pi - \theta)$  sont symétriques par rapport à  $Ox$ .

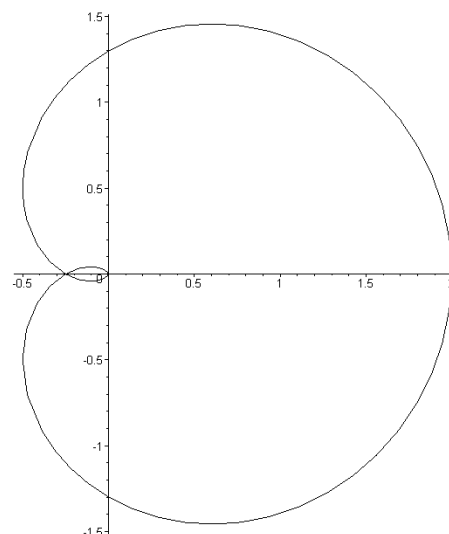
On peut donc se ramener à  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  et procéder à une symétrie par rapport à  $Ox$  (la symétrie déjà obtenue devenant alors inutile.)

On a  $\rho'(\theta) = -2a \sin \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}$ , d'où avec les notations habituelles :  $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -\cotan \frac{\theta}{3}$ .

On en déduit que l'angle polaire (dans le repère canonique) de la tangente au point de paramètre  $\theta$  est égal à  $\varphi = \theta + V = \frac{4\theta}{3} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ .

Voici le tableau de variation et le tracé (obtenu avec Maple, en choisissant  $a = 1$ .)

| $\theta$             | 0       | $\pi/2$        | $\pi$    | $3\pi/2$ |
|----------------------|---------|----------------|----------|----------|
| $\rho'(\theta)$      | 0       | -              | -        | - 0      |
| $\rho(\theta)$       | 2a      | $3a\sqrt{3}/4$ | $a/4$    | 0        |
| $\varphi \pmod{\pi}$ | $\pi/2$ | $\pi/6$        | $5\pi/6$ | $\pi/2$  |



On observe un passage à l'origine pour  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , donc avec une tangente verticale.

Le point  $(-\frac{a}{4}, 0)$  est un point double, obtenu à la fois pour  $\theta = \pi$  et pour  $\theta = -\pi$ . [Q]