

Un opérateur de dérivation partielle

Notations

Ω est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par : $(x, y) \in \Omega \Leftrightarrow 0 < y < x$.

$\mathcal{E}$ est l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à valeurs réelles.

Pour tout f de $\mathcal{E}$, on note $T(f)$ l'application : $(x, y) \mapsto x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Il est clair qu'on définit ainsi un endomorphisme T de $\mathcal{E}$.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k fois).

Pour simplifier, on pourra noter $T^k f$ plutôt que $T^k(f)$.

Par convention, T^0 est l'identité de $\mathcal{E}$.

Première partie

1. Pour tout (p, q) de $\mathbb{N}^2$, soit $f_{p,q}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_{p,q}(x, y) = x^p y^q$.
 - (a) Pour tout (j, k) de $\mathbb{N}^2$, calculer $\frac{\partial^{j+k} f_{p,q}}{\partial x^j \partial y^k}$. [S]
 - (b) Montrer que la famille des $f_{p,q}$, quand (p, q) parcourt $\mathbb{N}^2$, est libre.
Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par cette famille. [S]
 - (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ engendré par les applications $f_{p,q}$ telles que $p + q \leq n$.
Calculer la dimension de $\mathcal{P}_n$ et en donner une base. [S]
2. Soit f un élément non nul de $\mathcal{E}$, et soit λ un réel, tels que $Tf = \lambda f$.
 - (a) Ecrire la relation vérifiée par g définie sur Ω par $g(x, y) = (x + y)^{-\lambda} f(x, y)$. [S]
 - (b) Montrer que le changement de variable $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = y \end{cases}$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à préciser. [S]
 - (c) Avec ce changement de variables, montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $f(x, y) = (x + y)^\lambda \varphi(x^2 - y^2)$ pour tout (x, y) de Ω . [S]
3.
 - (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $\mathcal{P}_n$ est stable par T .
Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par T . A-t-on l'égalité $T(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$? [S]
 - (b) Pour tout (p, q) de $\mathbb{N}^2$, et tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $h_{p,q}(x, y) = f_{p,q}(x + y, x - y)$.
Montrer que les $h_{p,q}$ forment une base de $\mathcal{P}$. [S]
 - (c) Pour tout (p, q) de $\mathbb{N}^2$, montrer qu'il existe un réel $\lambda_{p,q}$ tel que $T(h_{p,q}) = \lambda_{p,q} h_{p,q}$. [S]
4. Résoudre l'équation $2T^4 f - T^3 f - 6T^2 f - Tf + 2f = 0$ dans $\mathcal{P}$.
Indication : factoriser $A = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$, et écrire f sur la base des $h_{p,q}$. [S]



Deuxième partie

Pour toute fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on définit f dans $\mathcal{E}$ par $f(x, y) \equiv \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

On considère l'équation $(E) : T^2f + 2aTf + bf = 0$, avec (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ et $a^2 \geq b$.

Il pourra être commode de noter $u = \frac{x}{y}$.

Pour tout réel γ , et tout $u > 1$, on note $\Psi_\gamma(u) = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{\gamma/2}$.

1. Calculer Tf et T^2f en fonction des dérivées première et seconde de ψ . [S]
2. (a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par ψ pour que f vérifie (E) . [S]
(b) Déterminer les fonctions ψ telles que $Tf = \lambda f$, avec λ dans $\mathbb{R}$.
A quelle condition sur λ la fonction f est-elle alors solution de (E) ?
Déterminer ψ pour qu'il en soit ainsi. [S]
3. (a) On suppose $a^2 > b$. Soient α, β les solutions distinctes de $t^2 + 2at + b = 0$.
Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est le plan engendré par Ψ_α et Ψ_β . [S]
(b) On suppose $a^2 = b$. Déterminer l'ensemble des solutions f de l'équation (E) .
Indication : $(E) \Leftrightarrow (T + aI)(Tf + af) = 0 \Leftrightarrow Tf + af = \lambda \Psi_{-a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. [S]