



Une intégrale dépendant d'un paramètre

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$, où α est un réel.

Première partie

1. Montrer que l'application F est définie et positive sur $I =]1, +\infty[$. [S]

2. Calculer $F(2)$, $F(3)$, $F(\frac{3}{2})$. [S]

3. Pour tout α de I , montrer que $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha} dt$. [S]

4. Montrer que l'application $\alpha \rightarrow F(\alpha)$ est convexe sur I .

Indication : pour t fixé dans $]0, 1]$, considérer l'application $h_t : \alpha \mapsto \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne deux entiers n et p strictement positifs, avec $p < 2n$.

Pour tout entier k de $\{1, \dots, 2n\}$, on note $\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi$.

1. Pour tout réel θ de $]0, \pi[$, calculer les sommes suivantes :

$$C_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\theta, S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)\theta \text{ et } D_n(\theta) = \sum_{k=1}^n (2k-1) \sin(2k-1)\theta. \text{ [S]}$$

2. Montrer que la fraction rationnelle $R(x) = \frac{p x^{p-1}}{x^{2n} + 1}$ se décompose en $R(x) = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n R_k(x)$, avec

$$R_k(x) = \frac{a_k x + b_k}{x^2 - 2x \cos \theta_k + 1}. \text{ Déterminer } a_k, b_k \text{ et prouver l'égalité } \sum_{k=1}^n a_k = 0. \text{ [S]}$$

3. Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, soit S_k la primitive de R_k qui s'annule en 0. Montrer que :

$$S_k(x) = \frac{a_k}{2} \ln(x^2 - 2x \cos \theta_k + 1) + \sin(p \theta_k) \arctan\left(\frac{x - \cos \theta_k}{\sin \theta_k}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_k\right) \sin(p \theta_k). \text{ [S]}$$

4. Montrer que si $\alpha = \frac{2n}{p}$, alors $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} R(t) dt$. En déduire $F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}$. [S]

5. On suppose que α est quelconque dans I . Montrer que $F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. Pour tout réel α , l'application $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est définie continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle est continue en 0 si $\alpha \geq 0$ et prolongeable par continuité par $f_\alpha(0) = 0$ si $\alpha < 0$.

Si $\alpha \geq 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_\alpha(t) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ donc f_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Si $\alpha > 0$, on a $f_\alpha(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$ quand t tend vers $+\infty$.

On en déduit (comparaison avec les intégrales de Riemann) que f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha > 1$, et non intégrable sinon.

Autrement dit, l'application $\alpha \mapsto F(\alpha)$ est définie sur $I =]1, +\infty[$.

Puisque f_α est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, il en est de même de $F(\alpha)$ pour $\alpha > 1$. [Q]

2. On a $F(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Pour calculer $F(3)$, on note que $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$.

On multiplie la décomposition par $t+1$ et on donne à t la valeur -1 . On trouve $a = \frac{1}{3}$.

On donne à t la valeur 0 et on obtient $a+c=1$.

On multiplie la décomposition par t et on fait tendre t vers $+\infty$. On trouve $a+b=0$.

Ainsi $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right) = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{2t-1}{6(t^2-t+1)} + \frac{1}{2(t^2-t+1)}$.

Une primitive de $\frac{1}{t^2-t+1} = \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ est $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)$

Une primitive de $\frac{1}{1+t^3}$ est donc $g_3(t) = \frac{1}{3} \ln(t+1) - \frac{1}{6} \ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$.

Ainsi $g_3(t) = \frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$.

On trouve $g_3(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_3(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Finalement, on obtient : $F(3) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_3(x) - g_3(0) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Pour calculer $F\left(\frac{3}{2}\right)$, on commence par effectuer le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

On trouve $F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{3/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2u du}{1+u^3}$.

On constate que $F\left(\frac{3}{2}\right) + 2F(3) = \int_0^{+\infty} \frac{2(1+u) du}{1+u^3} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-u+1}$.

Ainsi $F\left(\frac{3}{2}\right) + 2F(3) = \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{8\pi\sqrt{3}}{9}$.

Puisque $F(3) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$, il en découle $F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$. [Q]