



Étude et calcul des intégrales $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$

I. Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$.

Dans cette partie, on note φ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. (a) Montrer que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\varphi(x)| dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$ pour tout k de $\mathbb{N}$. [S]
(b) En déduire que φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (on rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$.) [S]
2. (a) Montrer que l'application $\psi : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [S]
(b) Pour tout $a > 0$, montrer que $\int_0^a \varphi(x) dx = a \psi(a) + \int_0^a \psi(x) dx$. [S]
(c) En déduire que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est encore notée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ bien que φ soit non intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [S]

II. Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0$. [S]
2. Soit f l'application définie sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$.
Montrer que f se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.
Dans la suite de cette partie, ce prolongement sera encore noté f . [S]
3. Pour tout entier naturel, calculer $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$. [S]
4. On pose $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. [S]
5. Dédurre de ce qui précède que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. [S]

**III. Calcul des intégrales** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$

1. Montrer que si $|u| \leq \alpha$, alors $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^\alpha$. [S]
2. Soit φ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
 - (a) Pour tout (k, t) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{+*}$, montrer que $x \mapsto x^k \varphi(x) e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $t > 0$, on pose $Y(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) e^{-tx} dx$ et $Z(t) = - \int_0^{+\infty} x \varphi(x) e^{-tx} dx$. [S]
 - (b) On se donne $a > 0$ et h tel que $|h| \leq \frac{1}{2} a$.
Montrer que $|Y(a+h) - Y(a) - hZ(a)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} x^2 |\varphi(x)| e^{-ax/2} dx$. [S]
 - (c) En déduire que Y est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $Y' = Z$. [S]
 - (d) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$. [S]
3. On reprend les notations précédentes avec l'application $\varphi : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.
 - (a) Vérifier rapidement que cette application φ est bien continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. [S]
 - (b) Calculer $Z(t)$, pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$. [S]
 - (c) En déduire que pour tout t strictement positif : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$. [S]
 - (d) Interpréter alors le résultat obtenu en (II.5) [S]

IV. Étude des intégrales $L_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$

Dans cette partie, on note toujours φ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que φ^n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $n \geq 2$.
Dans la suite de ce problème, on se propose d'étudier les intégrales $L_n = \int_0^{+\infty} \varphi^n(x) dx$
Montrer que $L_{2n} > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]
2. Dans cette question, on fixe n dans $\mathbb{N}^*$, et on va montrer que $L_{2n+1} > 0$.
On pose $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \varphi^{2n+1}(x) dx$, pour tout k de $\mathbb{N}$.
 - (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, montrer que $u_k = (-1)^k \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t + k\pi}\right)^{2n+1} dt$. [S]
 - (b) Pour tout k de $\mathbb{N}$, prouver que $u_{2k} + u_{2k+1} > 0$. [S]
 - (c) En considérant $W_m = \int_0^{2m\pi} \varphi(x)^{2n+1} dx$ (avec $m \in \mathbb{N}^*$) prouver que $L_{2n+1} > 0$. [S]



3. Dans cette question, on va montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$.

(a) Montrer que φ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. [S]

(b) On se donne $n \geq 2$, et a dans $]0, \pi[$. Montrer que $0 < L_n < a + \pi \varphi^n(a) + \frac{1}{(n-1)\pi^{n-1}}$.

Indication : $\mathbb{R}^+ = [0, a] \cup [a, \pi] \cup [\pi + \infty[$. [S]

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$. [S]

V. Calcul des intégrales $L_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$

Dans cette partie, $n \geq 2$ est fixé. On note f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin^n(x)$.

1. (a) Établir que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $f_n^{(k)}(x) = o(x^{n-1-k})$ au voisinage de 0.

Indication : développements limités en 0 obtenus par Taylor-Young. [S]

(b) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, l'application $f_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. [S]

2. Soit g une application de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a, b]$, avec $0 < a < b$. Montrer que :

$$\int_a^b f_n(x) g^{(n-1)}(x) dx = \left[\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k f_n^{(k)}(x) g^{(n-2-k)}(x) \right]_a^b + (-1)^{n-1} \int_a^b f_n^{(n-1)}(x) g(x) dx. \quad [S]$$

3. On pose $g(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que le résultat précédent s'écrit :

$$\int_a^b \varphi^n(x) dx = - \left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2-k)!}{(n-1)!} \frac{f_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}} \right]_a^b + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x} dx. \quad [S]$$

4. Dédurre de ce qui précède que $L_n = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x} dx$. [S]

5. Après avoir linéarisé de $f_n(x)$, montrer que :

$$- \text{ Pour tout entier } n \geq 1 : f_{2n}^{(2n-1)}(x) = \sum_{q=1}^n C_{2n}^{n-q} (-1)^{n-q} q^{2n-1} \sin(2qx).$$

$$- \text{ Pour tout } n \geq 1 : f_{2n+1}^{(2n)}(x) = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^{n-q} (-1)^{n-q} (q + \frac{1}{2})^{2n} \sin(2q+1)x. \quad [S]$$

6. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$L_{2n} = \frac{n\pi}{(2n)!} \sum_{q=1}^n C_{2n}^{n-q} (-1)^{n-q} q^{2n-1} \text{ et } L_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n)!} \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^{n-q} (-1)^{n-q} (q + \frac{1}{2})^{2n}.$$

Préciser notamment les valeurs de L_k , pour $2 \leq k \leq 7$. [S]

Corrigé du problème

I. Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$.

1. (a) On effectue le changement de variable $t = x - k\pi$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{k\pi + t} dt \geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{(k+1)\pi} dt, \text{ quantité égale à } \frac{2}{(k+1)\pi}. \quad [\text{Q}]$$

- (b) Si φ était intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on aurait $\int_J |\varphi| \leq \int_{\mathbb{R}^+} |\varphi|$ pour tout segment J de $\mathbb{R}^+$.

$$\text{Or pour tout } m \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \int_0^{m\pi} |\varphi(x)| dx = \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\varphi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}.$$

Ainsi $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{m\pi} |\varphi(x)| dx = +\infty$. L'application φ n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [Q]

2. (a) Une fois prolongée en 0 par $\psi(0) = \frac{1}{2}$, l'application ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

D'autre part $|\psi(x)| \leq \frac{2}{x^2}$, ce qui prouve l'intégrabilité de ψ sur $[1, +\infty[$.

Compte tenu de sa continuité sur $[0, 1]$, l'application ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [Q]

- (b) On intègre par partie sur $[0, a]$ (une primitive de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto 1 - \cos x$.)

$$\int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \psi(x) dx.$$

Le calcul précédent est justifié par la continuité de ψ en 0 et par $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

On a bien obtenu : $\int_0^a \varphi(x) dx = a\psi(a) + \int_0^a \psi(x) dx$, pour tout $a > 0$. [Q]

- (c) L'application ψ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi(x) dx$.

D'autre part $\lim_{a \rightarrow +\infty} a\psi(a) = 0$.

Le résultat de la question (b) donne donc : $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi(x) dx$.

On pose donc $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ bien que φ soit non intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On rappelle que l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de f continue équivaut à celle de $|f|$, qui équivaut à l'existence d'une limite finie pour $\int_0^a |f(x)| dx$ quand $a \rightarrow +\infty$.

Ici l'application φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a |\varphi(x)| dx = +\infty$.

Pourtant, on a constaté que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cela tient bien sûr aux changements de signe de l'application φ sur $\mathbb{R}^+$, qui induisent des "compensations" d'aire, compensations qui ne se produisent pas pour $|\varphi|$. [Q]