



Enoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer U_1 et U_2 .
2. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n .

Exercice 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une cour fermée est limitée par n murs discernables. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de p couleurs différentes ($p \geq 2$). Les choix des couleurs sont supposés mutuellement indépendants.

On note $N_{n,p}$ le nombre de façons de repeindre les murs de la cour de sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur. Prouver que :

$$N_{n+2,p} = (p-2) N_{n+1,p} + (p-1) N_{n,p}.$$

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

- 1) Dénombrer les couples de parties (A,B) de E telles que $A \cup B = E$
- 2) Dénombrer les triplets de parties (A,B,C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$U_1 = 1$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$U_2 = 2$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de $n+2$ chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

$$\text{Card } A_{n+2} = \text{Card } B_{n+2} + \text{Card } C_{n+2}$$

De plus :

$$\text{-Card } A_{n+2} = U_{n+2} \text{ (par définition)}$$

$$\text{-Card } B_{n+2} = U_{n+1} \text{ (il y a autant de codages de } n+1 \text{ chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de } n+2 \text{ chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).}$$

$$\text{-Card } C_{n+2} = U_n \text{ (comme un codage de } C_{n+2} \text{ ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en } n^{\text{ème}} \text{ position).}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$