

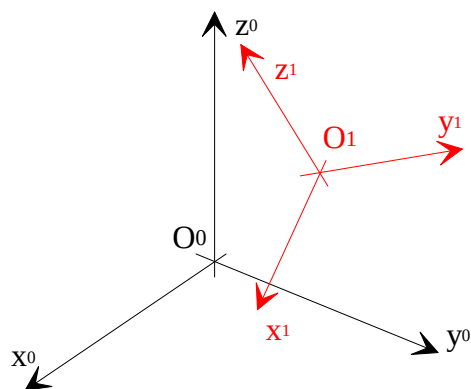


DERIVEE VECTORIELLE

SOMMAIRE

1. DERIVEE VECTORIELLE.....	1
1.1. NAISSANCE DU VECTEUR ROTATION	1
1.1.1. Le problème.....	1
1.1.2. Résolution :.....	1
1.1.3. Unicité de $\vec{\Omega}_{R1/R0}$	3
1.1.4. Calcul de $\vec{\Omega}_{R1/R0}$ pour une rotation autour d'un axe $(A, \vec{z}_{10})$	3
1.2. DERIVEE VECTORIELLE D'UN VECTEUR UNITAIRE	6
1.3. DERIVATION D'UNE FONCTION VECTORIELLE QUELCONQUE $\vec{U}(t)$	6
1.4. LES SAVOIRS INDISPENSABLES SUR LA DERIVEE VECTORIELLE.....	7
1.4.1. Dérivée d'un vecteur unitaire.....	7
1.4.2. Dérivée d'une fonction vectorielle	7
1.4.3. Valeur du vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R1/R0}$ dans un mouvement en rotation autour de l'axe $(A, \vec{z}_{10})$. 7	

1. DERIVEE VECTORIELLE.



Soient :

- $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère affine de base orthonormée directe $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère affine de base orthonormée directe $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- R_1 est en mouvement par rapport à R_0 .

1.1. Naissance du vecteur rotation

1.1.1. Le problème

L'objectif ici, est de déterminer les dérivées des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ par rapport au temps t, dans le

repère $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Ces dérivées seront notées : $\left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0}$, $\left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0}$ et $\left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0}$.

1.1.2. Résolution :

Les données : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est une base orthonormée directe. D'où :

- la condition 1 : $\|\vec{x}_1\| = \vec{x}_1^2 = 1$, $\|\vec{y}_1\| = \vec{y}_1^2 = 1$, $\|\vec{z}_1\| = \vec{z}_1^2 = 1$
- la condition 2 : $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 = 0$, $\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0$, $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0$

En utilisant la condition 1, on obtient par dérivation dans $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 = 0 \\ \left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = r \vec{y}_1 + s \vec{z}_1 \\ \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} = p \vec{z}_1 + t \vec{x}_1 \\ \left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = q \vec{x}_1 + u \vec{y}_1 \end{cases} \text{ où } p, q, r, s, t, u \text{ sont des réels}$$

En utilisant la condition 2, on obtient par dérivation dans $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 + \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 + \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \\ \left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 + \left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + r = 0 \\ u + p = 0 \\ s + q = 0 \end{cases}$$

les dérivées $\left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0}$, $\left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0}$ et $\left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0}$ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = r \vec{y}_1 - q \vec{z}_1 \\ \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} = p \vec{z}_1 - r \vec{x}_1 \\ \left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = q \vec{x}_1 - p \vec{y}_1 \end{cases}$$

On peut donc mettre ce résultat sous la forme :

$$\begin{cases} \left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{vmatrix} \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{x}_1 \\ \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{vmatrix} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{y}_1 \\ \left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{vmatrix} \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{z}_1 \end{cases} \text{ où } \vec{\Omega}_{R1/R0} = p \vec{x}_1 + q \vec{y}_1 + r \vec{z}_1$$