



Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE

Cinématique plane : Résolution graphique

Sommaire

1.	DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE.....	2
2.	CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN	2
2.1.	DEFINITION	2
2.2.	THEOREME	2
3.	APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE.....	3
3.1.	TRADUCTION GEOMETRIQUE DE L'EQUIPROJECTIVITE :	4
3.1.1.	Traduction géométrique de la relation $\vec{V}_{A \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB}$	4
3.1.2.	Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité.....	4
3.2.	CENTRE INSTANTANE DE ROTATION OU C.I.R.	4
3.2.1.	Définition	4
3.2.2.	Propriété du CIR.....	5
3.2.3.	Détermination analytique du centre instantané de rotation	5
3.3.	BASE ET ROULANTE.....	5
3.3.1.	Définition	5
3.3.2.	Propriétés.....	5
3.3.3.	Détermination analytique de la roulante dans un mouvement plan sur plan	5
3.3.4.	Détermination analytique de la base dans un mouvement plan sur plan	5
3.3.5.	Exemple de détermination de la base et de la roulante d'un mouvement	6
3.3.5.1	Présentation du système support de l'étude	6
3.3.5.2	Recherche du centre instantané de rotation I	6
3.3.5.3	Equation cartésienne de la base du mouvement de R1 par rapport à R0.	7
3.3.5.4	Equation cartésienne de la roulante du mouvement de R1 par rapport à R0.	7
3.3.5.5	Tracer de la base et roulante du mouvement de R1 par rapport à R0.	7
3.4.	DISTRIBUTION DES VECTEURS-VITESSE A PARTIR DU CENTRE INSTANTANE DE ROTATION.....	8
3.5.	DETERMINATION DE TOUS LES CENTRES INSTANTANES DE ROTATION	8
3.6.	THEOREME DES TROIS PLANS GLISSANTS (OU DES TROIS PLANS MOBILES OU DES TROIS C.I.R.).....	9
4.	MODÉLISATION PLANE DES MECANISMES.....	10
4.1.	MODELES DES LIAISONS DITES PLANES	10

La cinématique des solides : Mouvement plan

Cinématique : Etude des mouvements sans se préoccuper des causes qui les provoquent.

1. DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps et quel que soit sa position dans l'espace :

$$\forall A \in S \quad \text{et} \quad \forall B \in S, \quad \|\vec{AB}\| = cte \quad \text{dans le temps et dans l'espace}$$

Le champ des vecteurs-vitesse d'un solide est antisymétrique et équiprojectif (voir cours « la cinématique des solides »). Ainsi pour deux points A et B appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i , nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_{A \in S_k / R_i} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \Leftrightarrow \vec{V}_{A \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB}$$

2. CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

2.1. Définition

Un solide est animé d'un mouvement plan sur plan dans un repère de référence donné, si à tout instant, les vecteurs-vitesse de tous ses points restent parallèles à un plan fixe.

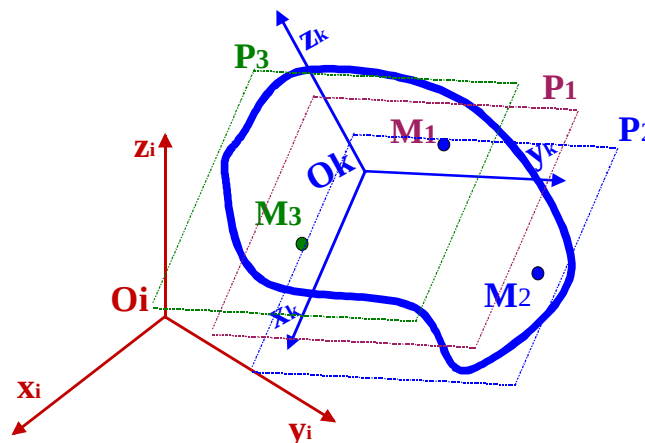
2.2. Théorème

Si trois points non alignés d'un solide S_k ont leur trajectoire dans un plan (P_i) appartenant au solide S_i , alors tous les points du solide S_k sont animés d'un mouvement plan, le plan du mouvement étant parallèle au plan (P_i) .

Le mouvement du solide S_k est à tout instant une rotation instantanée d'axe perpendiculaire au plan (P_i) .

Démonstration :

Soient trois points non alignés M_1 , M_2 et M_3 appartenant au solide S_k et se déplaçant respectivement dans les plans P_1 , P_2 et P_3 Parallèles entre eux de normale $\vec{z}_k$, dans un mouvement par rapport au solide S_i de repère associé R_i .



Nous pouvons donc affirmer que les vecteurs-vitesse $\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i}$, $\vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i}$ et $\vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i}$ appartiennent aux plans $(P_{i=1,2,3})$.

La formule du champ des vecteurs-vitesse pour un solide nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} &= \vec{V}_{O_k \in S_k / R_i} + \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \vec{O_k M_1}, \\ \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i} &= \vec{V}_{O_k \in S_k / R_i} + \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \vec{O_k M_2}, \\ \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i} &= \vec{V}_{O_k \in S_k / R_i} + \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \vec{O_k M_3}\end{aligned}$$

À partir des trois relations ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i} &= \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \vec{M_2 M_1} \text{ soit } \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i} \perp \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \\ \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i} &= \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \wedge \vec{M_3 M_1} \text{ soit } \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i} \perp \vec{\Omega}_{S_k / R_i}\end{aligned}$$

Les trois points M_1 , M_2 et M_3 , non alignés, ont un mouvement à priori quelconque. Donc

$\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_2 \in S_k / R_i}$ et $\vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} - \vec{V}_{M_3 \in S_k / R_i}$ sont deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i) .

Le vecteur $\vec{\Omega}_{S_k / R_i}$, perpendiculaire à deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i) , est donc perpendiculaire à ces plans (P_i) .

Le torseur cinématique caractéristique du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i s'écrit en un point quelconque, M_1 par exemple :

$$\{V(S_k / S_i)\}_{M_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \\ \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0, 0, \omega_z \\ V_x, V_y, 0 \end{array} \right\}_{M_1, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k} \quad \text{ou} \quad \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \cdot \vec{V}_{M_1 \in S_k / R_i} = 0$$

L'automoment de ce torseur est donc nul. C'est un torseur- glisseur. Donc en tout point I appartenant à l'axe du glisseur, nous avons $\vec{V}_{I \in S_k / R_i} = \vec{0}$.

Ainsi tous les points de l'axe central (Δ_{ki}) , perpendiculaire aux plans (P_i) , du torseur cinématique caractérisant le mouvement plan sur plan du solide S_k par rapport au repère R_i ont une vitesse nulle.

Le mouvement est donc une rotation instantanée d'axe $(I, \vec{\Omega}_{S_k / R_i})$ perpendiculaire aux plans (P_i) .

En conclusion, si les trois points M_1 , M_2 et M_3 ont leurs trajectoires dans les plans (P_i) , tous les points appartenant respectivement aux normales à ces plans issues de M_1 , M_2 et M_3 ont leurs trajectoires appartenant à des plans parallèles au plan (P_i) .

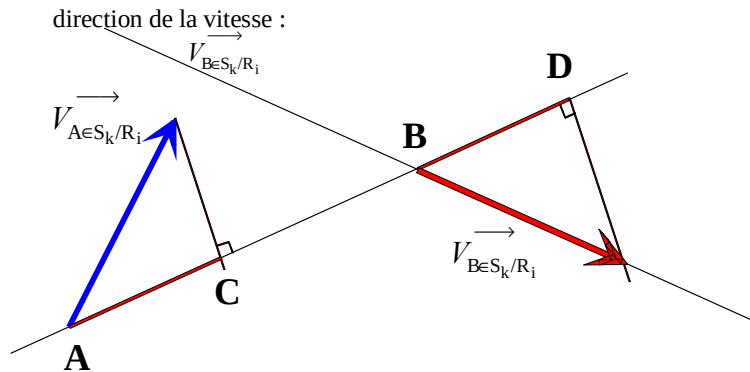
Donc l'étude du mouvement plan d'un solide se ramène à l'étude du mouvement des points d'un plan (P_k) appartenant au solide (S_k) et qui reste en coïncidence avec un plan (P_i) lié au solide (S_i) . Ce mouvement, qui est une rotation instantanée d'axe $\vec{\Omega}_{S_k / R_i}$ perpendiculaire au plan (P_i) , est appelé mouvement plan sur plan.

3. APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE

3.1. Traduction géométrique de l'équiprojectivité :

3.1.1. Traduction géométrique de la relation $\vec{V}_{A \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB}$

$\vec{V}_{A \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB}$ traduit que la projection orthogonale de $\vec{V}_{A \in S_k / R_i}$ sur la direction de $\vec{AB}$ est égale à la projection orthogonale de $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$ sur la direction de $\vec{AB}$. D'où la construction géométrique suivante :



Les projections orthogonales $\overline{AC} = \overline{BD}$, respectivement des vecteurs-vitesse $\vec{V}_{A \in S_k / R_i}$ et $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$, sur la droite orientée par le vecteur $\vec{AB}$ sont des mesures algébriques. Ces projections sont donc du même côté par rapport aux points A et B.

3.1.2. Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité

La relation $\vec{V}_{A \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB}$ est une relation scalaire. A priori nous avons quatre inconnues scalaires dans le plan formé par les vecteurs-vitesse $\vec{V}_{A \in S_k / R_i}$ et $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$. Nous ne pouvons donc appliquer cette relation d'équiprojectivité que dans la condition suivante : *le vecteur-vitesse du point A et la direction du vecteur-vitesse du point B sont connus.*

L'ordre des opérations est le suivant :

1. projeter $\vec{V}_{A \in S_k / R_i}$ sur la droite (A,B) ce qui donne $\overline{AC}$,
2. placer le point D sur la droite (A,B) tel que : $\overline{AC} = \overline{BD}$,
3. du point D, élever une perpendiculaire à la droite AB qui coupe la direction du vecteur-vitesse $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$ en un point qui est l'extrémité de ce vecteur.

Remarque :

Cette construction est impossible si la direction du vecteur-vitesse $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$ est perpendiculaire à la droite (A,B).

3.2. Centre instantané de rotation ou C.I.R.

3.2.1. Définition

On appelle centre instantané de rotation I_{ki} du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i le point où l'axe central (Δ_{ki}) , du torseur cinématique caractérisant ce mouvement, perce le plan d'étude.

Remarque :

Cette définition nous montre que :