

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Déterminer les endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté tels que :

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v).$$

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (euclidien) d'équations
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Déterminer la projection orthogonale sur F , par deux méthodes différentes.

Calculer la distance $d(u, F)$ d'un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ au sous-espace F .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Soit f un endomorphisme de E qui “conserve l'orthogonalité”, c'est-à-dire tel que, pour tous vecteurs u et v de E , $\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(u), f(v) \rangle = 0$.

Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout vecteur u de E , $\|f(u)\| = \lambda \|u\|$.

Si $\lambda > 0$, on dit alors que f est une *similitude* de rapport λ .

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$.

Soit f^* l'adjoint de f . Montrer que $\text{Ker}(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

1. Montrer que u et u^* ont le même noyau.
2. Montrer que $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(u^*)$, et que pour toute valeur propre λ les sous-espaces propres de u et de u^* pour λ sont identiques.
3. Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux.



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé \]](#)

Écarter la solution évidente $f = 0$.

Appliquer l'hypothèse aux vecteurs e_1, e_2, e_3 d'une base orthonormée directe.

Montrer que les $f(e_k)$ sont orthogonaux deux à deux, puis qu'ils sont unitaires.

Montrer que f est une rotation, puis établir la réciproque.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé \]](#)

– Première méthode :

Soit $v = (x', y', z', t')$ la projection orthogonale de $u = (x, y, z, t)$ sur F .

Montrer que $F^\perp$ est engendré par $a = (1, 1, 1, 1)$ et $b = (1, -1, 1, -1)$.

Trouver λ, μ tels que $v - u = \lambda a + \mu b$. La distance de u à F est donnée par $d^2 = \|v - u\|^2$.

– Deuxième méthode :

Montrer que $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ forment une base orthonormée de F .

En déduire que $v = p(u) = \langle c, u \rangle c + \langle d, u \rangle d$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé \]](#)

Se donner une base orthonormée $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ de E .

Remarquer que les $f(e_j)$ sont orthogonaux deux à deux.

Considérer les $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$, avec $i \neq j$, et en déduire que les e_k ont même norme..

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé \]](#)

Si $x \in \text{Ker}(f + f^*)$, montrer que $f^*(x) = \vec{0}$. En déduire $f(x) = \vec{0}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé \]](#)

1. Pour tout x de E , montrer que $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

2. Pour tout λ , appliquer ce qui précède à $v = u - \lambda Id$.

3. Se donner deux valeurs propres distinctes et deux vecteurs propres associés x et y .

Considérer $\langle u(x), y \rangle$ et en déduire l'orthogonalité de x et y .