



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans $\mathbb{K}[X]$, on se donne une suite de polynômes non nuls $(P_n)_{n \geq 0}$.

On suppose que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $\deg P_n < \deg P_{n+1}$.

1. Montrer que la famille $(P_n)_{n \geq 0}$ est libre.
2. Montrer que c'est une base de $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si, pour tout n , $\deg P_n = n$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

Montrer que la famille $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ constitue une base de E .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans $\mathbb{R}^4$, Soit E l'ensemble des $u = (x, y, z, t)$ tels que
$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel ; en donner la dimension et une base.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se donne une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ du segment $[a, b]$.

Soit F l'ensemble des applications $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont affines sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$.

Montrer que F est un espace vectoriel. En donner la dimension et une base.