

II Arcs paramétrés : propriétés métriques

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$, euclidien orienté, de dimension 2 ou 3.

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel associé.

On suppose que $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.

II.1 Rectification d'un arc paramétré

Définition (Ligne polygonale inscrite dans un arc)

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré continu de $\mathcal{E}$ (avec $a < b$).

Soit $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ une subdivision du segment $[a, b]$.

La suite des points $(M(t_k))_{k=0, \dots, n}$ est appelée ligne polygonale inscrite dans l'arc (I, f) .

La quantité $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_k)M(t_{k+1})} \right\|$ est la longueur de cette ligne polygonale.

Définition (Arc rectifiable)

On dit que l'arc paramétré $(I = [a, b], f)$ est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.

On appelle alors longueur de cet arc la quantité : $L = \sup_{\sigma} (L_\sigma)$, le "Sup" étant pris sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Proposition (Condition suffisante de rectifiabilité)

Si l'arc $(I = [a, b], f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors il est rectifiable et sa longueur est $\int_a^b \|f'(t)\| dt$.

Invariance par changement de paramétrage

On suppose que $(I = [a, b], f)$ et $(J = [c, d], g)$ (avec $a < b$ et $c < d$) sont deux représentations paramétriques du même arc de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui signifie qu'il existe un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme φ de I dans J tel que $f = g \circ \varphi$. Alors les longueurs des arcs (I, f) et (J, g) sont égales.

C'est une conséquence de $\int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|g' \circ \varphi(t)\| |\varphi'(t)| dt = \int_c^d \|g'(u)\| du$.

Cas particuliers (Tous les arcs considérés ici sont de classe $\mathcal{C}^1$ au moins)

– Arc plan défini par les applications coordonnées $(x(t), y(t))$:

La longueur de l'arc $(I = [a, b], f)$ est $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$.

– Arc plan défini par l'équation $y = y(x)$:

La longueur de l'arc $(I = [a, b], f)$ est $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$.

- Arc plan défini, en polaires, par l'équation $\rho = \rho(\theta)$:
La longueur de l'arc $(I = [a, b], f)$ est $L = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$.
- Arc gauche défini en cartésiennes par les applications $x(t), y(t), z(t)$:
La longueur de $(I = [a, b], f)$ est $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$.
- Arc gauche défini en cylindriques par les applications $\rho(\theta), z(\theta)$:
La longueur de $(I = [a, b], f)$ est $L = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) + z'^2(\theta)} d\theta$.

II.2 Abscisse curviligne

Définition

Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, et soit t_0 un élément de I .
Pour tout t dans I , la restriction de f à $[t_0, t]$ définit un arc paramétré rectifiable.
Notons $L(t)$ la longueur de cet arc.
On pose alors : $\forall t \leq t_0, S(t) = -L(t) \leq 0$, et $\forall t \geq t_0, S(t) = L(t) \geq 0$.
Autrement dit : $\forall t \in I, S(t) = \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt$.
On dit que l'application S est l'*abscisse curviligne* de l'arc (I, f) , orienté dans le sens des t croissants, avec $M(t_0)$ comme origine.
 $S(t)$ est appelé abscisse curviligne de $M(t)$. Celle de $M(t_0)$ est nulle.

Remarques

- Avec la même origine $M(t_0)$, on peut très bien orienter l'arc dans le sens des t décroissants, ce qui signifie choisir pour abscisse curviligne $S(t) = \int_t^{t_0} \|f'(t)\| dt$.
En fait l'abscisse curviligne oriente l'arc “dans le sens des abscisses curvilignes croissantes”.
- L'arc (I, f) est orienté dans le sens des t croissants, et on prend $M(t_0)$ pour origine.
Pour tout t de l'intervalle I , on a : $S'(t) = \|f'(t)\| = \left\| \frac{d\vec{OM}}{dt} \right\|$.
- Si l'arc (I, f) ne possède que des points réguliers, ou si les points non réguliers sont isolés, alors l'application S est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur I .

Paramétrage de l'arc par l'abscisse curviligne

- Si l'arc (I, f) est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$ et s'il est régulier, alors l'application S est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de I sur un intervalle J . L'arc paramétré $(J, g = f \circ S^{-1})$ et l'arc paramétré (I, f) sont alors deux représentations paramétriques du même arc géométrique.
Pour tout s de J , le point $M = f(t) = f \circ S^{-1}(s)$ est souvent noté $M(s)$.
L'abscisse curviligne définit donc une nouvelle représentation paramétrique de l'arc initial.
Quelque soit l'orientation choisie, l'arc est orienté dans le sens des “ s croissants”.