

Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout k de $\{0, \dots, n\}$, on pose $R_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

(a) Prouver les trois égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^n R_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n k R_{n,k}(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) R_{n,k}(x) = n(n-1)x^2. \quad [\text{S}]$$

(b) En déduire l'égalité : $\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x)$. [S]

2. Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |y - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Indication : raisonner par l'absurde et introduire un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) de $[a, b]$ telles que $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. [S]

3. Soit f une application définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$\text{Pour tout entier } n \geq 1, \text{ on pose } B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x).$$

On dit que les $B_n(f)$ sont les polynômes de Bernstein de f .

On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

On se donne $\varepsilon > 0$. On sait d'après la question précédente qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |y - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

(a) Montrer que $f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x)$. [S]

(b) Soit x un élément de $[0, 1]$. On note $A = \left\{k \in \{0, \dots, n\}, \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha\right\}$.

Soit B le complémentaire de A dans $\{0, \dots, n\}$.

i. Montrer que $\sum_{k \in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \varepsilon$. [S]

ii. Prouver $\alpha^2 \sum_{k \in B} R_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$ [S]

iii. Prouver que $\sum_{k \in B} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [S]

iv. Montrer finalement que $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [S]

(c) En déduire que la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. [S]

4. Montrer plus généralement le *théorème de Weierstrass* :

Toute application g continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômiales. [S]