

Dérivations d'un anneau

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau (qui n'est pas supposé commutatif).

On note 1 le neutre multiplicatif, et 0 le neutre additif.

Une application $\delta : A \rightarrow A$ est appelée une *dérivation* si :

$$\forall a, b \in A, \quad \begin{cases} \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) & (H_1) \\ \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) & (H_2) \end{cases}$$

Première partie

Soit δ une dérivation de A .

1. Calculer $\delta(0)$ et $\delta(1)$. [S]
2. a étant supposé inversible dans A , exprimer $\delta(a^{-1})$ en fonction de a^{-1} et de $\delta(a)$. [S]
3. Soit $D_\delta = \{a \in A, \delta(a) = 0\}$.
 - (a) Montrer que D_δ est un sous-anneau de A . [S]
 - (b) Montrer que si A est un corps, alors D_δ est un sous-corps de A . [S]
4. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de A , avec $n \geq 2$.
Calculer $\delta(a_1 a_2 \cdots a_n)$ en fonction des a_k et des $\delta(a_k)$. [S]
5. En déduire $\delta(a^n)$ pour tout a de A et tout $n \geq 2$.
Que devient cette formule si A est commutatif? [S]
6. On pose $\delta^0 = \text{Id}_A$, $\delta^1 = \delta$, et $\forall n \geq 1$, $\delta^n = \delta \circ \delta^{n-1}$.
Montrer par récurrence que : $\forall a, b \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \delta^n(ab) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \delta^p(a) \delta^{n-p}(b)$ [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ désignent des dérivations quelconques de A .

1. $\delta_1 + \delta_2$ et $\delta_1 \circ \delta_2$ sont-elles des dérivations de A ? [S]
2. On note $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$.
Montrer que $[\delta_1, \delta_2]$ est une dérivation de A . [S]
3. Montrer que : $[\delta_1, [\delta_2, \delta_3]] + [\delta_2, [\delta_3, \delta_1]] + [\delta_3, [\delta_1, \delta_2]] = 0_A$ (application nulle de A). [S]

Troisième partie

Pour tout $a \in A$, on note : $\forall x \in A, d_a(x) = ax - xa$.

1. Montrer que d_a est une dérivation de A . [S]
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A, d_a^n(x) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} x a^p$. [S]
3. En déduire que si a est nilpotent, alors il existe un entier m tel que $d_a^m = 0_A$. [S]
4. Vérifier les égalités, pour tous a, b de A :
 - (a) Pour toute dérivation δ de A : $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$. [S]
 - (b) En posant $[b, a] = ba - ab$, alors $[d_b, d_a] = d_{[b, a]}$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. Avec $a = b = 0$ ou $a = b = 1$, (H_1) et (H_2) donnent $\begin{cases} \delta(0) = 2\delta(0) \\ \delta(1) = 2\delta(1) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \delta(0) = 0 \\ \delta(1) = 0 \end{cases}$ [Q]

2. Avec $b = a^{-1}$, (H_2) donne $0 = \delta(aa^{-1}) = \delta(a)a^{-1} + a\delta(a^{-1})$ donc $a\delta(a^{-1}) = -\delta(a)a^{-1}$.
On en tire l'égalité $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1}$. [Q]

3. (a) L'hypothèse (H_1) signifie que δ est un endomorphisme du groupe $(A, +)$.

L'ensemble D_δ (qui n'est autre que $\ker \delta$) est donc un sous-groupe de $(A, +)$.

Il reste à vérifier que 1 est dans D_δ (mais on le sait) et que D_δ est stable pour le produit.

Or si a, b sont dans D_δ , alors $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) = 0b + a0 = 0$. [Q]

- (b) Si A est un corps, soit a un élément non nul de D_δ , c'est-à-dire tel que $\delta(a) = 0$.

Alors a est inversible dans A et $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1} = 0$ donc a^{-1} est dans D_δ .

Ainsi D_δ est stable pour le passage à l'inverse des éléments non nuls.

En plus d'être un sous-anneau, D_δ est donc un sous-corps de A . [Q]

4. On trouve $\delta(a_1a_2a_3) = \delta(a_1a_2)a_3 + a_1a_2\delta(a_3) = (\delta(a_1)a_2 + a_1\delta(a_2))a_3 + a_1a_2\delta(a_3)$.

Ainsi $\delta(a_1a_2a_3) = \delta(a_1)a_2a_3 + a_1\delta(a_2)a_3 + a_1a_2\delta(a_3)$.

Par récurrence, on prouve que $\delta\left(\prod_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{k=1}^n \left[\left(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\right)\delta(a_k)\left(\prod_{j=k+1}^n a_j\right)\right]$.

La propriété est en effet vraie au rang $n = 2$. Supposons qu'elle le soit au rang n .

On trouve successivement :

$$\begin{aligned} \delta\left(\prod_{k=1}^{n+1} a_k\right) &= \delta\left(\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)a_{n+1}\right) = \delta\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)a_{n+1} + \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)\delta(a_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\right)\delta(a_k)\left(\prod_{j=k+1}^n a_j\right)\right]a_{n+1} + \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)\delta(a_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\right)\delta(a_k)\left(\prod_{j=k+1}^{n+1} a_j\right)\right] + \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)\delta(a_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\left(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\right)\delta(a_k)\left(\prod_{j=k+1}^{n+1} a_j\right)\right] \text{ ce qui établit la propriété au rang } n+1 \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé la propriété pour tout $n \geq 2$. [Q]

5. Pour $a \in A$ et $n \geq 2$, la formule précédente donne $\delta(a^n) = \sum_{k=1}^n \left(a_j^{k-1}\delta(a_k)a_j^{n-k}\right)$.

En particulier, si A est commutatif : $\delta(a^n) = n\delta(a)a^{n-1}$.

Remarque : le résultat obtenu rappelle la formule $(f^n)' = nf'f^{n-1}$. Rien d'étonnant car si $(A, +, \cdot)$ est l'anneau des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application $\delta : A \rightarrow A$ définie par $\delta(f) = f'$ est une ...dérivation.

La formule $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1}$ trouvée en (3b) rappelle bien sûr $(1/f)' = -f'/f^2$.

Quant à la question suivante, il s'agit ni plus ni moins de redémontrer la formule de Leibniz. [Q]