

Quaternions

On se place dans l'algèbre $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et on définit les quatre matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Former le polynôme caractéristique de J .
Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? [S]
 - Reprendre la question (a) avec la matrice K . [S]
 - Reprendre la question (a) avec la matrice L . [S]
- Montrer que $G = \{I, J, K, L, -I, -J, -K, -L\}$ est un sous-groupe non commutatif, pour le produit des matrices, du groupe $\mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$ des matrices inversibles d'ordre 4. [S]
- Soient a, b, c, d quatre nombres complexes, et $A = aJ + bK + cL + dI$.
 - Déduire de ce qui précède une expression de A^2 en fonction de A et de I . [S]
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que la matrice A^2 soit diagonale. Quelle est alors son expression en fonction de I ? [S]
 - On note A_0 la matrice A obtenue pour $d = 0$. Calculer $\det A_0^2$ et en déduire $\det A_0$. [S]
- Déterminer le polynôme caractéristique de A en considérant le produit de la matrice $A - \lambda I$ (avec $\lambda \in \mathbb{C}$) par sa transposée. [S]
 - En déduire les valeurs propres de A et exprimer $\det A$ en fonction de a, b, c, d . [S]
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que A admette une valeur propre quadruple. [S]
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que les valeurs propres de A soient $-i$ et i . [S]
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que A soit inversible. [S]
- On pose $\omega = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et on suppose que A est inversible.
 - Calculer $\det A^{-1}$ et déterminer A^{-1} en effectuant le produit $A^T A$. [S]
 - Déterminer les valeurs propres de A^{-1} . [S]
 - Calculer le polynôme caractéristique de A^{-1} . [S]
- Soit E l'ensemble des matrices A , quand (a, b, c, d) décrit $\mathbb{C}^4$.
 - Montrer que E est une algèbre non commutative possédant des diviseurs de zéro. [S]
 - Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A, A' commutent dans E . [S]
- Soit F l'ensemble des matrices A , quand (a, b, c, d) décrit $\mathbb{R}^4$.
Montrer que toute matrice non nulle de F est inversible dans F . [S]