

Méthodes

I. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

- **Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes. L'application $(X,Y) : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$ est un vecteur aléatoire discret à valeur dans $\mathbb{R}^2$ (ou couple de variables aléatoires réelles discrètes).
- **Loi de probabilité ou loi conjointe de (X,Y) .** On appelle loi de probabilité (ou loi conjointe) d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes (X,Y) , l'application $p : \begin{cases} (X,Y)(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ (i,j) \mapsto p([X=i] \cap [Y=j]) \end{cases}$.
- **Loi marginale de X .** Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On appelle loi marginale de X , l'application $p : \begin{cases} X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto \sum_{j \in Y(\Omega)} p([X=i] \cap [Y=j]) \end{cases}$.
- **Loi conditionnelle de X sachant $[Y=j]$.** Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes et $j \in Y(\Omega)$ tel que $p(Y=j) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant $[Y=j]$, l'application : $p : \begin{cases} X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto p\left(X = i \middle| Y = j\right) = \frac{p([X=i] \cap [Y=j])}{p(Y=j)} \end{cases}$.
- **Indépendance de deux variables aléatoires.** Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. X et Y sont indépendantes si $\forall (i,j) \in (X,Y)(\Omega), p([X=i] \cap [Y=j]) = p(X=i) p(Y=j)$.

II. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- **Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.** Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n variables aléatoires réelles discrètes. L'application $(X_i)_{1 \leq i \leq n} : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto (X_i(\omega))_{1 \leq i \leq n} \end{cases}$ est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
- **Loi de probabilité de $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$.** On appelle loi du vecteur aléatoire discret $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, l'application $p : \begin{cases} (X_i)_{1 \leq i \leq n}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ (K_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto p\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = K_i]\right) \end{cases}$, également notée $p : \begin{cases} (X_i)_{1 \leq i \leq n}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ (K_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto p(X_1 = K_1, X_2 = K_2, \dots, X_n = K_n) \end{cases}$.

- **Loi marginale de X_1 .** Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On appelle

loi marginale de X_1 , l'application $p : \begin{cases} X_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto \sum_{(K_j)_{2 \leq j \leq n} \in (X_j)_{2 \leq j \leq n}(\Omega)} p\left([X_1 = i] \cap \left(\bigcap_{j=2}^n [X_j = K_j]\right)\right) \end{cases}$.

- **Indépendance.** Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si :

$$\forall (K_i)_{1 \leq i \leq n} \in (X_i)_{1 \leq i \leq n}(\Omega), p\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = K_i]\right) = p(X_1 = K_1, X_2 = K_2, \dots, X_n = K_n) = \prod_{i=1}^n p(X_i = K_i).$$

- Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes, alors :

- toute permutation de $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est indépendante,
- pour tout $p \in [1, n]$, les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont indépendantes et :
- pour tout $p \in [1, n-1]$, toute fonction de $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ est indépendante de toute fonction de $(X_i)_{p+1 \leq i \leq n}$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes. Cette suite est une suite de variables aléatoires indépendantes si toute sous-suite finie de cette suite est constituée de variables aléatoires indépendantes.

III. Opérations sur les variables aléatoires

- **Linéarité de l'espérance.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance. On a : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- **Covariance.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que XY admette également une espérance. On appelle covariance de X et Y et on note $\text{cov}(X, Y)$, le nombre :

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) \text{ soit :}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

En particulier, on a : $\text{cov}(X, X) = V(X)$.

- **Propriétés de la covariance.** Soient X , Y et Z trois variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que XZ et YZ admettent également une espérance.

On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{cov}(aX + bY, Z) = a \text{cov}(X, Z) + b \text{cov}(Y, Z),$$

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X),$$

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}.$$

- **Variance d'une somme.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une variance et telles que XY admette une espérance. On a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y).$$

Plus généralement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour toute suite $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $X_i X_j$ admette une espérance, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

Soient I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, f une fonction définie sur

$(X, Y) (\Omega)$ et $Z = f(X, Y)$. Z est une variable aléatoire discrète et, si la double somme

$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} |f(x_i, y_j) p([X = x_i] \cap [Y = y_j])|$ existe, alors Z admet une espérance et cette espérance

vaut : $E(Z) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(x_i, y_j) p([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$

En particulier, si $E(XY)$ existe, on a : $E(XY) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} x_i y_j p([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$

Indépendance. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes. On a alors :

- $\text{cov}(X, Y) = 0$,
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ (si X et Y admettent une espérance);
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ (si X et Y admettent une variance).

Coefficient de corrélation linéaire. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes non constantes ou quasi-constantes. On appelle coefficient de corrélation linéaire et on note $\rho_{x,y}$ le

nombre : $\rho_{x,y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$

On a : $|\rho_{x,y}| \leq 1$ et $\rho_{x,y} = 1$ et si et seulement si $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, Y = aX + b$. Y est alors dite fonction quasi-affine de X .

Stabilité pour la somme des lois binomiale et de Poisson. Soient X et X' deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes,

- si X suit $\mathcal{B}(n, p)$ et X' suit $\mathcal{B}(n', p)$, alors $(X + X')$ suit $\mathcal{B}(n + n', p)$,
- si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ et X' suit $\mathcal{P}(\lambda')$, alors $(X + X')$ suit $\mathcal{P}(\lambda + \lambda')$.