N°53
Mai 2012

Référence

LA REVUE DES PRÉPAS

Avec Klubprépa

Crises...

ISSN 1266-1627

Référence
LA REVUE DES PRÉPAS

Avril 2012 N° 53

Directeur de la Rédaction
David Colle

Ont collaboré à ce numéro
David Colle, Cédric Tellenne, Frédéric Teulon, S. Tulliez

Maquette et réalisation
Groupe Sigma Communication

GROUPE SIGMA COMMUNICATION
16, rue du Cloître Notre-Dame 75004 Paris
e-mail : sigmacom@wanadoo.fr

ISSN 1266-1627 • Dépôt légal avril 2012

Directeurs de la publication
Gérard Larguier, Patrick Noël

Directeur adjoint
Christophe Pignet

Éditorial

La morale de la crise

David Colle

“Vous avez une chance formidable... c’est la crise !” ai-je osé de manière provocante (mais non cynique) devant mes étudiants pour débuter l’année. D’un point de vue heuristique, pour observer, prendre conscience, comprendre les comportements insouciants, l’indifférence, l’irresponsabilité dont ont fait preuve banquiers, financiers, politiques, ménages mais finalement dont nous avons fait preuve nous-mêmes, rien de tel. Malheureusement, si certains d’entre nous restent ou croient rester à l’écart des conséquences de cette crise, d’autres le paient *cash*.

Le prix est lourd à payer. Deux fois plus de chômeurs en quelques mois, des familles fragilisées, financièrement et psychologiquement. Sans compter les chômeurs invisibles : les souterrains qu’empruntent habituellement voitures et scooters sous le forum de halles à Paris sont devenus un dortoir pour des dizaines de personnes n’ayant plus de toit. Cherchant à se protéger du froid, ils sont quelques mètres sous des galeries dont les boutiques et grandes enseignes ne désemplissent pas. La crise ne fait que côtoyer la plupart d’entre nous. Cependant, même ceux qui se jouent de l’incertitude, la transforment en simple risque (en probabilisant les évènements) et en ont fait leur métier – parfois un jeu – se sont mis à redouter le futur et ressentir la conséquence principale de l’incertitude sociale : la peur. Les banquiers sont en première ligne, comme lorsqu’en 1878, le syndicat des Chevaliers du Travail aux États-Unis s’ouvrait “à toute personne de bonne volonté, à la seule exception de celles exerçant une profession déshonorante telle que banquier, cabaretier, prostituée ou avocat”... Parmi les financiers, certains ont pris peur devant tant d’irresponsabilité et, comme en 1929, se sont défenestrés ; d’autres sont rentrés de l’Eldorado. Ils ont cessé d’être londoniens, ou Londoniens, mais les héros de Jack au Klondike allaient souvent vers la mort, tandis que ceux de Londres, ayant perdu leur travail ou craignant de le perdre, reviennent goûter aux joies sans risque – et sans peur – de la protection sociale française.

La crise est une catharsis, elle est à la fois catastrophe et opportunité. C'est à la fois le moment du *jugement* et de la *décision*, comme le révèle son étymologie. Dans les milliers de pages qu'il a pu écrire, Marx a cette phrase capitale à propos du crédit, d'une lucidité (qu'on n'en déduise pas que je suis marxiste !) qui résonne aujourd'hui comme en 1929 : "Tel levier peut, mieux que tel autre, vaincre la résistance de la matière inerte. Mais tous existent du fait que la résistance demeure". Nous actionnons tous les leviers : physiologique, mécanique, financier... qui sont autant de prothèses pour un corps humain finalement faible. Ces leviers révèlent un esprit ingénieux. Mais lorsque sonne le rappel, lorsque que le spectre de la résistance resurgit, nous observons effarés les créances qui s'évanouissent, l'épargne en danger, l'emploi en péril, les retraites incertaines. Et au milieu de cela, la "socialisation des pertes" déplorée par les marxistes. Nos gouvernements démocratiques n'ont pas eu beaucoup d'autre choix que de socialiser ces pertes, le "laisser-faire" s'étant soldé dans les années trente par 10 millions de chômeurs américains, 6 millions d'allemands, 2,5 millions d'anglais, et par un ressentiment – dont même Nietzsche a sous-estimé l'importance – qui, en Allemagne, provoquera l'avènement du nazisme.

En plein cœur de la crise, banquiers, marchés, individus ont été satisfaits de pouvoir constater la présence de l'État et des institutions dont la légitimité sautait enfin aux yeux. Les libéraux sont devenus keynésiens, faisant sourire ces derniers tout à leur victoire d'enrôler parmi eux les ennemis d'hier. Les taux d'intérêt des emprunts d'Etat ont baissé dans les premiers moments de la crise (d'environ deux points !), nos institutions étaient les refuges, nos garanties de protection de nos dépôts, de nos retraites, de nos systèmes d'assurance chômage et maladie. Le réveil est douloureux. C'est à présent sur ces institutions que se trouve l'épée de Damoclès et les libéraux tiennent déjà leur revanche sur l'État. Prenons garde toutefois à soutenir ses bras. Car comme le disait Frédéric Bastiat (qu'on n'en déduise pas que je suis ultralibéral !) : "l'État, c'est toi". Et souvenons nous – c'est la leçon de Hobbes – que nous déléguons sur lui la violence (le pouvoir) que nous ne voulons prendre le risque d'assumer. N'ayons aucun doute : les nouvelles régulations, financières, comptables... la déontologique à présent à la mode, devenue un marché, qui s'apprend – parfois d'ailleurs avec un certain cynisme – dans nos écoles de commerce, ne suffiront pas à éviter la prochaine crise. Amartya Sen ne parlait-il déjà du besoin d'éthique et de responsabilité financière dans des articles de la *Revue d'économie financière* à la fin des années 80 !?

Toute crise économique est potentiellement crise sociale, politique, morale. Réformer, réguler, est louable, compter sur les institutions est légitime ; mais nos comportements restent, en partie, indéterminés, révélant une part importante du libre-arbitre, fondamental dans les sociétés démocratiques, moins dans les sociétés autoritaires mais qui n'attend que de se révéler : le "printemps arabe" en fait foi comme hier la chute du mur ou plus tôt encore l'immolation par le feu de Jan Palach à Prague pour protester contre l'invasion russe.

Nous ne pouvons à la fois observer avec indifférence un monde où l'on peut prêter aux ménages américains plutôt pauvres, à des taux d'intérêt dont le risque d'élévation, élevé, n'est indiqué qu'en note de bas de page de contrats qui devraient faire honte à leurs rédacteurs, un monde où l'on peut confier notre épargne à des fonds communs dont nous ne voulons rien savoir d 'autre que ce qu'ils rapportent, où l'on souhaite, faute de temps, s'en remettre à des agences de notation pour évaluer le risque de nos débiteurs, où l'on s'estime en droit (!) d'exiger des taux de rendement (réels !, s'il vous plaît) d'au moins 10 à 15% tous les 3 ou 5 ans sur nos actifs financiers, plus encore s'ils sont immobiliers... nous ne pouvons nous réjouir de ce monde et feindre la surprise quand, au matin, le scandale arrive.

Toute crise, si elle est importante, est aussi crise des valeurs. Valeurs financières bien sûr, valeurs patrimoniales, mais aussi de ces valeurs qui ne se définissent pas. Celle que dépeint Sebastian Haffner dans son roman autobiographique *Histoire d'un allemand* à propos de son père, cette morale sans doute kantienne qui fait ressentir individuellement "ce qui ne se fait pas". Dans son essai *Théorie de la folie des masses* (1979), le romancier Hermann Broch observe combien l'homme, se ralliant à la masse, renonce à son identité personnelle, à son éthique de la responsabilité tandis que plus tôt, dans son roman *Les irresponsables* (1951), confrontant trois grandes crises de l'Allemagne (1913, 1923, 1933), il semblait dire qu'à fuir le réel et dénier ses propres responsabilités, on finit par précipiter sa propre mort.

D. C.

La crise de 1929 : déclenchement et propagation

Frédéric Teulon, S. Tulliez

La crise de 1929 a marqué les esprit et constitue un point de référence dans l'histoire économique des crises. Elle fut nouvelle par son ampleur : une dépression d'une forte intensité (contraction de la production et des échanges), une diffusion mondiale (hors URSS), une durée remarquable (jusqu'en 1939 pour certains pays). Elle fut nouvelle également par l'étendue de ses conséquences : des conséquences sociales immédiates (chômage de masse, mesures sociales), et une remise en cause plus générale de l'ordre économique traditionnel (amorce d'un État-Providence).

Contenue en germe dans les désordres économiques des années 20, la "Grande dépression" a été déclenchée par la crise boursière américaine, et n'a été jugulée que tardivement en raison des réactions inadaptées des États.

Le contexte des années 20

Un ordre économique mondial en mutation

Les années 20 se caractérisent par de fortes tensions dans les relations financières internationales. Les pays d'Europe doivent régler leurs dettes de guerre (auxquelles s'ajoutent les "réparations" pour les pays vaincus) et ont donc tendance à mener des politiques inflationnistes (hormis la GB). Les États-Unis sont devenus créanciers du monde, au détriment de la GB. Les fonds américains affluent vers l'Europe, mais ce sont surtout des capitaux à court terme, donc fortement volatiles.

Les années 20 se caractérisent également par une instabilité monétaire internationale. Suite à la suspension de la convertibilité-or des monnaies durant la guerre, le système de l'étalon de change-or ("Gold Exchange Standard") se met en place lors de la conférence de Gênes en 1922 : la monnaie de chaque pays n'est plus directement liée à l'or mais à une monnaie de référence, elle-même convertible en or (en l'occurrence le dollar et la livre-sterling). Le système mondial repose donc désormais sur la santé monétaire de deux pays : GB et États-Unis.

Les années 20 se caractérisent enfin par une timide reprise des relations commerciales. La croissance des échanges reste inférieure à celle de la production mondiale. Les pays européens ont perdu leur position hégémonique d'exportateurs au bénéfice de nouveaux concurrents, et commencent à développer un certain protectionnisme.

Une prospérité précaire

Les États-Unis connaissent une période de prospérité, symbolisée par la croissance de l'industrie automobile (fordisme). Les hausses de profits enregistrées par les entreprises se traduisent logiquement par une hausse des cours boursiers. Mais elles constituent également un apport de liquidités, qui alimente largement le marché boursier.

La pratique des “call loans” décuple l’activité boursière : cette technique d’achat “à la marge” permet de spéculer sur des actions en n’en payant que 10% à l’avance, et le reste grâce aux gains réalisés.

Ceci conduit à la constitution d’une bulle spéculative sur le marché de New-York. Entre 1921 et 1929, la production industrielle augmente de 50%, tandis que le cours des actions augmente de 300%.


DECATUR EVENING HERALD

WALL STREET IN NEW PANIC

“Une” d’un quotidien américain durant la crise de 1929
24 octobre 1929 - DR

Le déroulement de la crise mondiale

Le déclenchement de la crise américaine

Le krach boursier de Wall Street fonctionne comme un détonateur de la crise. Le jeudi 24 octobre 1929, près de 13 millions de titres sont vendus. En 10 jours, les titres perdent 50% de leur valeur : de nombreux agents voient leur patrimoine se dévaloriser et perdent du pouvoir d’achat ; les banques et entreprises voient leurs sources de financement se tarir et certaines sont acculées à la faillite. Tout concourt à une contraction de la demande, alors que l’économie connaît une situation de surproduction.

Une “spirale déflationniste” se met en place. Les agriculteurs ne peuvent plus écouler leurs stocks et sont affectés par la baisse des prix. Les entreprises connaissent des problèmes de trésorerie et licencient.


Wall Street, 24 octobre 1929
Mouvement de foule devant la bourse lors de la crise de 1929 - DR

La situation peut se résumer par :

- une contraction de la production (le PNB en volume diminue de 30% entre 1929 et 1933),
- une baisse générale des prix (de 18% entre 1929 et 1932),
- l’apparition d’un chômage de masse (11 millions de personnes, soit ¼ de la population active en 1932).

La propagation de la crise au reste du monde

La crise américaine connaît un retentissement mondial, non seulement du fait de la position dominante de l’économie américaine, mais également en raison des fragilités internes des autres pays.

Elle se propage par la voie commerciale. La récession américaine entraîne une contraction des échanges internationaux. Par un effet mécanique d’abord : les États-Unis diminuent leurs importations, et grèvent donc les recettes commerciales de leurs partenaires commerciaux qui ne peuvent eux-mêmes plus importer, d’où une contraction du commerce mondial et des productions nationales. Par des choix politiques ensuite : les nations ont de plus en plus recours au protectionnisme pour tenter de sauver l’emploi national.

Elle se propage par la voie financière. La crise boursière américaine entraîne une raréfaction des capitaux. Les fonds placés à l'étranger sont donc rapatriés, ce qui accélère les crises bancaires en Europe (faillite de la Kredit Anstalt de Vienne le 14 mai 1931). La crise financière se propage d'Autriche en Allemagne, puis en GB.

Les États face à la crise

L'échec des approches traditionnelles : les politiques déflationnistes

Selon l'idéologie libérale, la crise est d'abord considérée comme une perturbation transitoire due aux excès des années 20 (inflation et déficit budgétaire). Ceci explique la mise en place de politiques déflationnistes : des politiques monétaires restrictives pour lutter contre le risque d'inflation, et une restriction des dépenses publiques pour obtenir un retour à l'équilibre budgétaire.

Celles-ci ne font qu'approfondir le processus dépressionniste en ponctionnant la masse monétaire et en freinant toute hausse du pouvoir d'achat.

La recherche de solutions nouvelles : les politiques de relance

En 1933, l'ensemble des pays industriels compte 30 millions de chômeurs. Cet enlisement dans la dépression conduit à la recherche de voies nationales de sortie de crise.

La victoire du Front populaire en France en 1936, suivie de mouvements de grève, aboutit à la signature des accords Matignon (hausses salariales et baisse de la durée du travail). Mais les résultats sont décevants en raison de la contrainte extérieure : la hausse des prix freine les exportations.

En Allemagne, Hitler arrive au pouvoir en 1933 et pratique une relance en autarcie (contrôle des changes et gel des avoirs étrangers). Il mène une politique de grands travaux, largement axée sur un réarmement, qui diminue notablement le chômage.

F. T. - S. T.

Avec l'élection du démocrate Roosevelt à la tête des États-Unis en 1932, c'est l'État qui va se charger d'amorcer la reprise économique, grâce à une politique de grands travaux et de déficit budgétaire : le "New Deal". Entre 1932 et 1939, le revenu national est multiplié par deux, mais le chômage reste élevé.

Franklin Delano Roosevelt (1882-1945)
Président des États-Unis (1933-1945) - © W.H.

La crise de 1929 : théories et interprétations

Frédéric Teulon, S. Tulliez

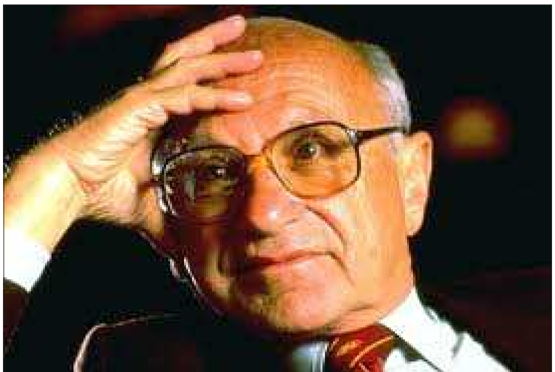
La notion de crise renvoie traditionnellement à un retournement de situation (phase B du cycle), elle fonctionne comme une "purge" qui doit résorber les déséquilibres. C'est la première approche retenue par ses contemporains pour analyser la crise de 1929. Mais la crise peut renvoyer plus fondamentalement à une rupture du mode de régulation économique, induisant alors des changements économiques et sociaux durables. C'est l'hypothèse qui a été privilégiée plus tardivement. La crise de 1929 : crise traditionnelle ou crise spécifique ?

Les explications traditionnelles sont insuffisantes

Les lectures libérales de la crise

Pour les libéraux, la crise est un phénomène transitoire et exogène, qui ne remet pas en cause la stabilité générale du système capitaliste. Pour les économistes contemporains de la crise, sa gravité est à mettre en relation avec les entraves aux mécanismes du marché qui se sont accrues dans les années 20. Lionel Robbins, dans son ouvrage La grande dépression : 1929-1934, dénonce la montée des négociations collectives pour la détermination des salaires, ainsi que les désordres monétaires et financiers de l'après-guerre (politique monétaire expansive, développement du crédit à la consommation). Ce type d'argument est repris par Jacques Rueff pour la France : les progrès syndicaux expliquent une plus grande rigidité du marché du travail. Les salaires étant rigides à la baisse, les profits diminuent, et avec eux le niveau de l'investissement et de la production. D'où la notion de "chômage volontaire".

Des analyses plus tardives sont délivrées par le monétariste Milton Friedman (dans son Histoire monétaire des États-Unis, 1960). La crise, au départ traditionnelle, a été aggravée par l'attitude irréfléchie du FED, qui n'a pas joué son rôle de prêteur en dernier ressort, et a laissé les banques et entreprises s'asphyxier par manque de liquidités (La masse monétaire a diminué de près d'un tiers entre 1929 et 1933).



Milton Friedman
1912-2006 - DR

Des analyses hétérodoxes

Pour Schumpeter, la crise de 1929 s'inscrit tout à fait dans le cadre traditionnel de l'analyse des cycles économiques. Seul le hasard a voulu que se juxtaposent à cette date le retournement de trois types de cycles : Kondratieff (25-50 ans), Juglar (8-10 ans) et Kitchin (2-4 ans). Ceci expliquerait donc l'ampleur sans précédent de la crise.

Pour les marxistes, les crises sont inéluctables et endogènes. Elles ne sont que l'expression des contradictions internes au capitalisme. Pour Eugène Varga (La crise économique, sociale et politique, 1934), la crise de surproduction de 1929 trouve son origine dans un double mouvement de suraccumulation et de concentration de la richesse d'un côté, et de paupérisation de la population de l'autre. Le système capitaliste est amené à subir des crises de plus en plus violentes, jusqu'à sa disparition.

Irving Fischer
1867-1947 - DR

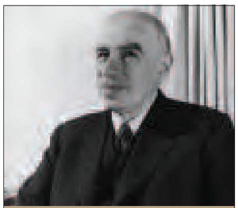
Irving Fischer s'intéresse davantage aux facteurs financiers de la crise dans son analyse de "la déflation par la dette". La croissance des années 20 a été tirée par l'endettement. Mais un endettement excessif pousse les agents à se désendetter car ils viennent à manquer de liquidités : ceux-ci se mettent donc à vendre leurs actifs ; l'investissement, la consommation et les dépenses publiques s'amenuisent, ce qui entraîne une déflation. Celle-ci ne fait que surenchérir le poids de la dette des agents, qui se consacrent alors davantage au désendettement et renforcent d'autant la déflation. C'est une spirale cumulative.

Mais ces analyses traditionnelles peinent à appréhender la complexité de la crise, qui, par son ampleur et ses conséquences, semble annoncer la fin des mécanismes économiques du monde classique.

La crise engendre donc un renouveau de l'analyse économique des crises

La crise de 1929 à l'origine de la pensée keynésienne

Dans la Théorie générale (1936), Keynes prend le contre-pied de l'analyse classique traditionnelle. Il constate en 1929 une situation d'équilibre de sous-emploi (surproduction + chômage), qui contredit la loi de Say. La baisse des salaires, préconisée par les classiques, n'apparaît pas comme une solution satisfaisante, car elle aboutirait à une baisse de la demande et de la production, et donc à une hausse du chômage. Une intervention de l'État est donc nécessaire, sous la forme d'une politique de relance (déficit budgétaire, politique monétaire de taux d'intérêt bas, politique de redistribution).



John Maynard Keynes
1883-1946 - DR

Jean-Baptiste Say
1767-1832 - DR

Dans les années 60, la lecture de la crise de 1929 sera effectivement keynésienne : on estime que des politiques de relance plus précoces et plus systématiques auraient permis d'éviter la dépression. Pourtant, les pratiques pré-keynésienne menées à l'époque (New Deal aux États-Unis, Front populaire en France) n'ont pas été pleinement concluantes. On a pu calculer que pour compenser la baisse de régime aux États-Unis, il aurait fallu consentir à un déficit public représentant 50% du budget de l'État !

Les nouvelles hypothèses de l'école de la régulation

La période précédant la crise (de 1850 aux années 1920) se caractérise par un mode de régulation concurrentiel (flexibilité du travail, faible intervention de l'État dans l'économie), qui repose sur un régime d'accumulation extensive (par l'utilisation d'une plus grande quantité de facteurs). Or, depuis le début du siècle commence à se développer notamment au États-Unis un régime d'accumulation intensive (par la hausse de la productivité des facteurs), qui est bloqué par le manque de débouchés : la production de masse voit le jour grâce aux forts gains de productivité (taylorisme, fordisme), mais elle ne débouche pas sur une consommation de masse, en raison de la faiblesse des gains de pouvoir d'achat. Ce qui aboutit logiquement à la crise de surproduction de 1929.

La crise n'étant pas classique dans ses origines, ne se résoudra pas automatiquement. Il est donc nécessaire d'agir sur les formes institutionnelles de la régulation : face au mouvement continu de concentration de l'offre des entreprises, les règles de la concurrence sont déjouées. Les autres agents doivent s'adapter à ce nouveau mode de régulation de type monopolistique : les salariés en développant les négociations collectives ; l'État en intervenant pour soutenir la demande.

La crise de 1929 inaugure donc une nouvelle ère économique : celle d'un mode régulation monopolistique, qui repose sur un régime d'accumulation intensive.

F. T. - S. T.

Dans quelle mesure la crise des années trente remet-elle en cause le libéralisme ?

Cédric Tellenne

Le libéralisme est une notion complexe, recouvrant les domaines économique, politique et social. Assurément, la crise des années trente introduit une rupture profonde dans la mesure où elle met un terme au libéralisme économique tel qu'on l'entendait au XIXe siècle et ébranle les démocraties libérales. Le système économique libéral, dans ses excès, n'est-il pas à l'origine du déclenchement de la crise ? De toute façon, le capitalisme libéral sort profondément transformé, à plus d'un titre, de ces années difficiles.

La crise des années trente porte un rude coup aux principes fondamentaux du libéralisme économique

Pour parler de remise en cause du libéralisme, il faut savoir jusqu'où celui-ci allait dans les années 1920 : or, ces années sont loin d'apparaître comme des années de libéralisme pur et parfait

Libre-échange ? Cette décennie s'inscrit dans la continuité des pratiques commerciales d'avant-guerre : pas de politique de désarmement douanier malgré les recommandations du président Wilson dans les "Quatorze Points" mais des droits de douane stables en moyenne (autour de 25 % pour les produits manufacturés en Europe et aux États-Unis). Les obstacles non tarifaires mis en place durant la guerre sont toutefois démantelés.

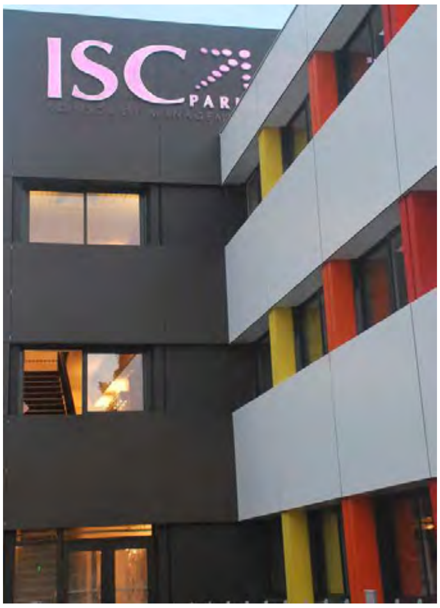
Thomas Woodrow Wilson (1856-1924)
Président des États-Unis (1856-1924) - © W.H.

"Main invisible" ? Malgré un recul net par rapport à la période d'économie de guerre (mobilisation de la main-d'oeuvre, gestion des pénuries, orientations productives), l'État conserve une partie de ses fonctions nouvelles, en raison des besoins de la reconstruction et de la stabilisation financière.

Par rapport aux années vingt, les années de crise sont marquées par un renforcement généralisé du protectionnisme et le repli commercial des puissances capitalistes

Les politiques de protection tarifaire se multiplient dans les années 1930. La dégradation de l'activité économique, des prix et de l'emploi conduit les États-Unis à adopter le tarif Hawley-Smoot, voté par le Sénat en juin 1930, portant les droits perçus sur les importations à une moyenne de 50 % de la valeur des produits. Dès février 1932, le


Trouver
sa voie
Gagner
en expérience
LE DÉVELOPPEMENT
PERSONNEL
DURABLE
by ISC PARIS
SCHOOL OF MANAGEMENT
Entreprendre
pour apprendre
S'ouvrir
au monde
iscparis.com
DIPLÔME VISÉ - GRADE DE MASTER - MEMBRE DE LA CONFÉRENCE DES GRANDES ÉCOLES



ISC Paris, School of Management ISCparis.com

Le cursus ISC Paris :

- En 1re et 2e année : 32 matières de tronc commun (marketing, droit, communication, finance…) et 16 matières à choisir parmi plus de 150 d'électifs proposés ;
- En 3e année : 1 spécialisation de 400 h à choisir parmi 20 :
  - Achats Logistique Distribution / International Business and Management / International Corporate Finance / Marketing et management des industries du luxe / Marketing stratégie…

- 12 à 14 mois de stage durant le cursus et une année de césure possible entre la 2e et la 3e année ;
- Mise en pratique des enseignements dans les 23 Entreprises Etudiantes de l'école dans des domaines variés.
- 155 universités partenaires dans 51 pays ;
- L'international est au cœur de la pédagogie. Les étudiants ont ainsi la possibilité de faire, en 1re année, un stage de 4 mois à l'international, en 2e ou 3e année de partir 1 ou 2 semestres chez l'un des 155 partenaires, d'effectuer un stage de 6 à 8 mois à l'étranger en 3e année et enfin de suivre un MBA dans une université américaine lors d'une 4e année ;
- 1 parcours bilingue dès la 1re année.

Date de création : 1963.
Visas et labels :
- Diplôme bac + 5 visé par le ministère de l'Education nationale et conférant le grade de master ;
- Membre de la Conférence des Grandes Ecoles et du Chapitre des Ecoles de Management.
- Membre de l'EFMD, de l'AACSB, de l'UGEI, de la FNEGE, de la NAFSA, de la CREPUQ et de CampusFrance.

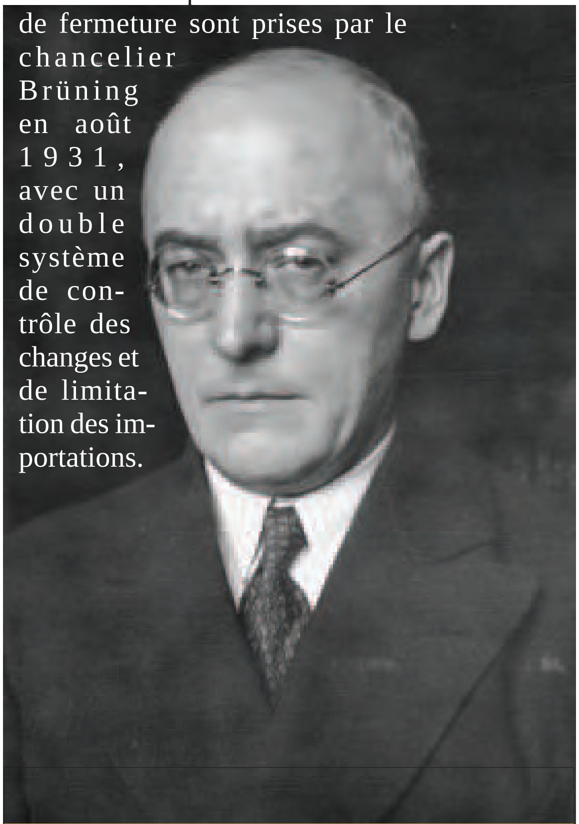
Le concours prépas

- Nombre de places en 2012 : 245
- Coefficients :
  - Ecrit : 30
  - Oral : 30
  - Connaissances générales : 5
  - Entretien individuel : 15
  - LV1 : 5
  - LV2 : 5
- les écrits : Banque commune d'épreuves écrites pour le haut enseignement commercial ;
- les oraux : du 18 juin au 7 juillet 2012 : les épreuves se déroulent sur une journée
  - épreuves de langues (Iéna) : LV1 et LV2 (toutes options)
  - entretien individuel : à partir d'un questionnaire, discussion ouverte pour déceler les motivations, les qualités humaines et relationnelles du candidat comparées aux objectifs et finalités de l'école.
  - connaissances générales : chaque candidat est invité à répondre à une série de questions (histoire, géographie, actualité, art…). Il s'agit à la fois de mesurer les connaissances et réactions du candidat.

Durant la période des oraux, l''hébergement des candidats peuvent se faire gratuitement chez un étudiant de l'ISC Paris, des animations : visites, Paris by Night leur sont également proposés.

Pour plus d'informations sur le concours,
contactez Lionel Theulier : ltheulier@iscparis.com - ISCparis.com

Royaume-Uni imite les États-Unis en signant l'*Import Duties Act*. Le commerce mondial est très fortement touché par ce regain de protectionnisme : la chute en valeur atteint environ 60 % entre 1929 et 1935. Certains États, à l'image de l'Allemagne, sont tentés par l'autarcie. Les premières mesures de fermeture sont prises par le chancelier Brüning en août 1931, avec un double système de contrôle des changes et de limitation des importations.



Heinrich Brüning (1885-1970)
21e Chancelier d'Allemagne, 13e du Reich (1930-1932)- DR

L'échec de la Conférence de Londres en juin 1933 précipite l'effritement du monde en zones monétaires et commerciales concurrentes. Par les accords d'Ottawa en 1932, le Royaume-Uni incite les dominions britanniques, à l'exception du Canada, à aligner leur monnaie sur la livre sterling. Pour le Royaume-Uni, le repli commercial sur son Empire constitue une réponse à la crise, largement "importée", et au marasme des échanges internationaux.

La crise du système de Gênes aggrave les entorses au libéralisme économique mondial

A partir de 1931-1932, le système monétaire international défini à Gênes est enterré au nom du "chacun pour soi" : il n'est plus question d'accepter un ordre basé sur le crédit de certaines monnaies clefs qui est à la source de la crise. Les pays industriels oscillent entre dévaluations successives et mesures autarciques. Le Royaume-Uni abandonne l'étalon or en 1931 et la livre, flottante, perd environ un tiers de sa valeur.

Un bloc-or se constitue autour des pays désirant de maintenir l'or comme étalon (France, Belgique, Suisse). La France est le seul pays à réagir contre le contrôle des changes en 1931, en instituant une surtaxe de change (pour compenser les effets des dévaluations étrangères), puis en adoptant le contingentement, par le biais d'un Office de Compensation.

La crise marque l'échec des politiques économiques libérales

La crise montre les limites de la confiance absolue dans les lois du marché

Le déclenchement de la crise est largement imputable, comme le montrent les analyses classiques, aux excès de la spéculation boursière aux États-Unis, en l'absence de réglementation et de contrôle efficaces : l'activité frénétique de Wall Street, la multiplication des intermédiaires financiers *(brokers)* et l'essor de l'achat sur marge sont aux origines de la "bulle spéculative" qui éclate en situation de surproduction.

L'économie d'endettement développée pendant et après la guerre aux États-Unis mais également en Europe porte une lourde responsabilité dans la contagion mondiale de la crise (faillite des banques autrichiennes et allemandes après rapatriement des capitaux américains).

Les solutions libérales à la crise s'effacent devant un interventionnisme de type keynésien

En période de crise, l'État libéral se borne traditionnellement à restreindre le crédit pour sauver la monnaie. L'échec de la politique de déflation du chancelier Brüning en Allemagne montre les limites de la déflation.

Seul l'État peut provoquer une reprise de l'économie par des investissements publics de grands travaux et augmenter le nombre d'emplois : cette idée, formulée en Grande-Bretagne dans les années vingt par des économistes comme Keynes ou Robertson, finit par s'imposer dans les politiques économiques des années trente : le New Deal de F. D. Roosevelt en est le plus parfait exemple, mêlant des aspects keynésiens *(deficit spending)* et des mesures plus pragmatiques. Sur le plan social, c'est le libéralisme qui triomphe : face au *Big Business*, la liberté syndicale et la pratique des conventions collectives sont réaffirmées, l'État se donnant un pouvoir d'arbitrage et de contrôle.

Le recours à l'interventionnisme d'État n'est toutefois pas généralisé dans le monde développé

Le Canada ne rompt pas avec le libre-échange : le contrôle des changes n'est pas instauré, l'étalon-or est maintenu malgré les accords d'Ottawa en 1932, l'État soutient le commerce extérieur dans le cadre d'accords bilatéraux (comme celui avec le Royaume-Uni en 1938).

Sur le plan intérieur, la crise économique est vigoureuse :

- Du fait des liens commerciaux avec les États-Unis.
- Du fait d'une forte spécialisation productive : le blé et ses dérivés, la pâte et le papier, les métaux non ferreux.

Le Premier Ministre MacKenzie King perd les élections de 1930 pour avoir refusé "que le fédéral verse une pièce d'un cent de pseudo secours aux chômeurs". Son successeur Benett lance un "New Deal" canadien, en réalité bien en retrait par rapport à celui de Roosevelt : primes de vente aux agriculteurs, travaux publics et nouveau Code du Travail. Il est interrompu par le retour de King et des libéraux au pouvoir en 1935 qui ne reviennent pas pour autant sur l'œuvre de Benett : la Commission Rowell-Sirois publie en 1940 un rapport légitimant les empiètements du fédéral dans l'ordre économique et social. Le Canada a retrouvé la croissance dès 1934.

William Lyon Mackenzie King (1874-1950)
Premier ministre canadien (1935-1948) sous George V, Edouard VIII et George VI - DR

La crise ébranle également les systèmes politiques libéraux

En Allemagne, l'État totalitaire s'engage dans une économie dirigée et autarcique visant à la préparation de la guerre

Le NSDAP d'Adolphe Hitler, dont l'influence politique est insignifiante jusqu'à la fin des années 1920, accroît son audience, parallèlement à celle des communistes, à mesure que le fléau du chômage s'accroît en Allemagne. La prise du pouvoir le 30 janvier 1933 par Hitler marque l'écroulement des derniers piliers de la démocratie en Allemagne. Un régime totalitaire se met alors en place.

Adolph Hitler (1889-1945)
24e Chancelier d'Allemagne, 14e du Reich (1933-1945) et Führer (1934-1945)

La mobilisation économique et sociale du Reich place l'Allemagne au second rang des puissances industrielles grâce à un effort de préparation à la guerre. Les circonstances comme l'idéologie imposent à l'économie allemande un dirigisme strict. La militarisation de l'économie s'accompagne d'une mobilisation de la main-d'œuvre : les syndicats sont remplacés par un Front du Travail. A partir de 1935, le service du travail est obligatoire et permet de disposer d'une main-d'oeuvre gratuite.

Dans les pays anglo-saxons, le consensus libéral survit à la crise

Au Royaume-Uni, en août 1931, Mac Donald constitue un gouvernement d'union nationale associant travaillistes et conservateurs pour lutter contre la situation de crise économique. Le nationalisme économique l'emporte : abandon du libre-échange, mot d'ordre *Buy Britannic*. L'économie britannique connaît une phase de dirigisme, dont les axes majeurs sont une politique de crédit à bon marché et des encouragements à la concentration industrielle et financière.

Le consensus économique et social reste pourtant inchangé, du fait de l'augmentation continue du pouvoir d'achat des classes moyennes et de leur accession à la civilisation des loisirs et de la consommation de masse. Le parti d'inspiration fasciste fondé par Edward Mosley *(British Union of Fascists)* garde une audience très confidentielle.

En France, la crise économique et sociale dégénère en crise institutionnelle et débouche sur l'expérience du Front Populaire

C'est en 1931 que les Français prennent conscience de la crise économique, alors que leur pays faisait jusque-là figure "d'îlot de prospérité" dans un monde en crise. La crise frappe de plein fouet les classes moyennes urbaines (fonctionnaires, pensions et retraités, professions libérales) et rurales, exacerbant les antagonismes entre grou-

pes sociaux et sapant l'assise sociale du régime républicain.

Les partis extrêmes profitent de la paralysie du pouvoir politique et de l'impuissance des partis de gouvernement (modérés, radicaux) à endiguer la crise économique. Les doctrines de réforme de l'État fleurissent à gauche (Jeunes Turcs du parti radical) comme à droite (André Tardieu). L'instabilité ministérielle et le climat d'affairisme (Affaire Stavisky) donnent une occasion aux ligues nationalistes d'ébranler le régime (6 février 1934). Le Front Populaire, rassemblement des partis et organisations antifascistes, remporte les élections de 1936 et conduit le socialiste Léon Blum au pouvoir sous le slogan "Pain, Paix, Liberté".

André Tardieu (1876-1945)
Couvertures de "Time" des 23 mai 1927 (G) et 20 janvier 1930 (D)

La crise économique provoque globalement une vague de nationalisme économique et parfois politique qui contredit les principes fondamentaux du libéralisme. La victoire de l'étatisation intégrale en Allemagne constitue non la règle mais l'exception : le capitalisme sait s'adapter et sort transformé de la crise. Le nouveau rôle assigné à l'État, en termes de responsabilité économique et social, annonce les Trente Glorieuses de l'après 1945 ?

C. T.

Les banques et le financement de l'économie depuis 1945. Le nerf de la guerre.

Cédric Tellenne

Le système bancaire regroupe aujourd'hui près de 1.450 établissements de crédit, employant plus de 400.000 employés et plus de 25.500 guichets sur le territoire. Peut-on parler d'une "exception française" du système bancaire ? Les grandes transformations qu'ont connues les banques françaises depuis 1945 n'ont rien de spécifique, on peut les rattacher au mouvement mondial de restructuration et de déréglementation, ainsi qu'à la révolution introduite par les nouvelles technologies.

La tradition française de spécialisation bancaire et de contrôle de l'État sur le financement de l'économie remonte au XIX^{e} siècle

La distinction entre banques d'affaires et banques de dépôt est ancienne

Depuis le milieu du XIX^{e} siècle, alors que le secteur bancaire connaît un essor décisif en lien avec la soif de capital de la révolution industrielle, une distinction classique s'est opérée en France entre :

• d'une part les *banques de dépôt*, cherchant à drainer l'épargne publique et se spécialisant dans le crédit à court terme et l'escompte : ce sont les banques de réseaux tels le Crédit Lyonnais d'Henri Germain (1863) ou la Société Générale (1864), multipliant les guichets à travers le territoire ;


Henri Germain (1824-1905)

• d'autre part les *banques d'affaires*, caractérisant la "haute finance", spécialisées dans le financement de long terme et les opérations industrielles, ferroviaires ou immobilières d'envergure : la banque Rothschild, le Crédit mobilier des frères Pereire (1852), Paribas (1872) en sont les exemples les plus illustres.

Cette spécialisation bancaire s'oppose au modèle allemand de la "banque universelle", effectuant l'ensemble des opérations de financement et de gestion de l'épargne (la *Deutsche Bank*, créée en 1870 en est l'exemple le plus abouti avec ses participation dans Siemens et Daimler).

La *Banque de France*, créée par un décret du Premier Consul Napoléon Bonaparte du 18 janvier 1800, entrave tout au long du XIX^{e} siècle le développement des activités de financement industriel à long terme pour les banques de dépôt. La “banque des banques” est théoriquement indépendante, en vertu de son statut privé de “société par actions” au capital de 30 millions de francs. Par le biais des participations majoritaires dans son capital, elle est de fait partiellement soumise à la tutelle de l’État : par le système du réescompte, par son rôle de prêteur en dernier ressort et sa fonction de “banque de l’État”, elle contrôle le financement de l’économie française.

La loi bancaire de 1945 entérine le principe de spécialisation bancaire et donne à l’État la mainmise sur les réseaux du crédit

L’État confirme **une stricte séparation entre banques d’affaires et banques de dépôt.** Les banques de dépôt ne peuvent détenir des participations de plus de 10% dans le capital des entreprises, reçoivent des dépôts à vue ou à un terme qui ne peut être supérieur à deux ans. Le montant des participations industrielles ne peut en aucun cas dépasser 75% de leurs ressources propres.

Avec la nationalisation totale de la Banque de France, l’État enterre le principe d’indépendance de la “banque des banques”, déjà mis à mal par la réforme de 1936 qui confiait le pouvoir à vingt conseillers nommés pour la plupart par le gouvernement : le capital de la Banque est transféré à l’État, les actionnaires privés sont dédommagés en obligations. La Banque de France consent des avances et des prêts pour financer la dette publique. Son gouverneur est nommé en Conseil des ministres, sur proposition du président de la République.

L’État met en place le Conseil national du Crédit, qui réglemente les opérations bancaires (taux, délais de remboursement, part de l’acompte) et renforce le contrôle de l’État sur les organismes de crédit spécialisé, ainsi que sur le puissant réseau de collecte des liquidités : caisses d’épargne, chèques postaux, Caisse des dépôts et consignation.

Il s’agit, et c’est là une spécificité française, d’établir un contrôle de la nation sur l’épargne.

A travers les nationalisations, les principales banques commerciales sont utilisées comme le “fer de lance” de la politique industrielle

L’État nationalise en 1945 quatre grands établissements de crédits et, à travers eux, 55% du réseau français du crédit bancaire : le Crédit Lyonnais, la Société Générale, la BNCI (Banque nationale pour le Commerce et l’Industrie) et le CNEP (Comptoir National d’Escompte de Paris), lesquelles deviendront en 1966 la Banque Nationale de Paris (BNP).

Parallèlement, trente-quatre sociétés d’assurances sont nationalisées. Seules les banques d’affaires échappent à cette vague de nationalisations mais elles sont soumises au double contrôle du Conseil national du Crédit nommé par l’État et d’une commission comprenant le gouverneur de la Banque de France et des hauts fonctionnaires.

Depuis le milieu des années 1960, les spécificités du système bancaire français s’effacent progressivement

Une déspécialisation progressive du système bancaire tend à imposer le modèle de la “banque universelle”

Les lois Debré-Haberer de 1966-1967 réforment la loi de décembre 1945 qui s’est révélée de plus en plus contraignante. Elles remettent en cause le principe de spécialisation bancaire en atténuant la distinction entre banques d’affaires et banques de dépôts. Les banques d’affaires ont désormais la possibilité de recevoir des dépôts à vue à court et moyen terme. Les banques de dépôt peuvent recevoir des fonds à plus de deux ans. Il leur est interdit de rémunérer les dépôts à vue (cela reste une spécificité française aujourd’hui). La liberté d’ouverture des guichets est assurée. Il s’agit d’une orientation vers le principe de la banque universelle.

La **loi bancaire de 1984,** dont Pierre Bérégovoy trace les grandes lignes dans son “livre blanc sur la réforme du financement de l’économie”, met en place une organisation bancaire beaucoup plus libérale. Le principe d’universalité triomphe. Les banques deviennent des acteurs majeurs des marchés financiers, en concurrence avec les autres institutions financières : il s’agit d’un décloisonnement total des métiers de la banque, de l’assurance et des investissements financiers. Un marché unifié des capitaux est mis en place : tous les acteurs financiers peuvent négocier sur les différents marchés, des capitaux à court, moyen ou long terme.

Des nationalisations aux privatisations, le secteur bancaire est profondément remodelé

En 1982, sous le gouvernement socialiste de Pierre Mauroy, trente-neuf nouveaux établissements de crédit sont nationalisés, ainsi que deux groupes financiers d'envergure mondiale : Suez et Paribas.

Pierre Mauroy (1928-)
Premier ministre français (1981-1984)
Maire de Lille (1973-2001), Sénateur du Nord (1992-2011) - DR

C'est cette fois 15% du crédit bancaire qui passe sous le contrôle de l'État. Les banques sont sollicitées pour venir en aide aux industries en difficultés : en tout, 6 milliards de frais participatifs sont débloqués pour les entreprises en difficultés.

Le démantèlement du pôle financier public est commencé entre 1986 et 1988 sous le gouvernement Chirac : les privatisations concernent de grands groupes comme Paribas, Suez, la Société Générale, le CCF, Sogenal. Une deuxième vague de privatisation, sous le gouvernement Balladur entre 1993 et 1995, parachève la dénationalisation du secteur bancaire avec des opérations majeures concernant la BNP, les AGF et l'UAP. Toutefois, le sort du Crédit Lyonnais reste un temps en suspens, il est hypothéqué par une gestion aventureuse sur fond de scandale financier ("affaire Tapie") : l'État garde encore aujourd'hui 10% environ du capital. Récemment, l'État a finalisé les opérations de privatisation commencées il y a 20 ans : vente par l'État du CIC au Crédit mutuel, de la Société marseillaise de crédit au CCF, du CCF à HSBC puis de la Banque Hervet à HSBC-CCF.

Jacques Chirac (1932-)
Premier ministre français (1986-1988 et 1974-1976)
Président de la République (1995-2007), Maire de Paris (1977-1995) - DR

Il n'est pas jusqu'au statut de la Banque de France qui ne s'aligne sur celui des principaux partenaires. La loi Balladur de janvier 1994 établit en effet l'indépendance de la Banque de France, pour répondre aux impératifs de construction d'une Union Économique et monétaire en Europe et, à terme, de passage à la monnaie unique.

Le secteur bancaire français n'échappe pas depuis quinze ans à une puissante vague de concentration

Les difficultés des grandes banques françaises ont été résolues majoritairement par croissance externe depuis vingt ans. La restructuration du système bancaire passe par l'accélération des fusions-acquisitions. Elles sont pour l'essentiel réalisées dans un même secteur d'activités, il s'agit de concentration horizontale : rachat du Crédit du Nord par la Société Générale, rapprochement CDC-Caisses d'épargne (pour créer Eulia, un holding commun), rachat dans l'assurance du GAN par Groupama ou de l'UAP par Axa, rachat du Crédit Lyonnais par le Crédit Agricole après cession par l'État d'une grande partie de ses participations. Les rachats sont également transfrontaliers : rachat des AGF par l'assureur allemand Allianz, rachat du CCF par HSBC.

Parallèlement, d'autres banques jouent sur les complémentarités et mènent une stratégie de diversification : achat d'Indosuez par le Crédit agricole, de Natexis par les Banques populaires. L'acquisition de Paribas par la BNP en 1999 fait de ce groupe bancaire le leader en zone euro par la capitalisation boursière (46 milliards d'euros), devant la *Deustche Bank* (40 milliards d'euros) ; en 2002 la BNP profite de la privatisation partielle du Crédit Lyonnais pour en prendre partiellement le contrôle.

Au total, le processus de concentration est important : en 1993, les cinq premières banques françaises représentaient 39% du marché national ; en 2000, elles contrôlent 47% du marché bancaire et près de 70% des dépôts des épargnants. Toutefois, les grandes banques françaises gardent une taille modeste face à leurs concurrentes étrangères : le Crédit Agricole, par exemple, qui représente 20% du marché français toutes activités confondues, ne représente que 3% du marché européen et moins de 0,5% du marché mondial.

Dans les années 1960-1970, la vive concurrence les pousse à densifier leurs réseaux avec l'ouverture de nombreux guichets : c'est l'origine d'une "surbancarisation" qui nuit à partir des années 1980 à la rentabilité des banques françaises.

Les **banques d'affaires** se transforment en grandes sociétés financières pour financer une industrie de plus en plus concentrée. Elles constituent le "cœur financier" (F. Morin) du système productif français. Il s'agit d'une évolution "à l'allemande" dans laquelle les liens banques-entreprises sont de plus en plus étroits. Une banque comme Paribas, par exemple, délaisse de plus en plus les investissements dans les banques et les services publics (respectivement 45% et 14% en 1945 contre 34% et 4% en 1957) pour le financement de l'industrie, qui représente 34% en 1945, 55% en 1957 et encore 40% dans les années 1970 à 1990. La prise de contrôle du groupe Schneider en 1981 est une illustration de cette politique. Ces banques favorisent aussi les opérations de concentration industrielle. Par exemple, Paribas aide une entreprise comme Fougerolles, à partir du milieu des années 1950 à se hisser parmi les géants français du BTP : le rachat de la SNCT en 1973 est le point d'orgue de cette stratégie.

Les banques doivent s'adapter à la montée irrésistible des marchés financiers et du financement désintermédié

Les banques françaises sont au cœur du financement de l' "économie d'endettement" des Trente Glorieuses.

A partir des années 1950, les **banques de dépôt** ont mené une vaste politique de crédits aux particuliers, soutenant la consommation de masse, favorisant l'achat de logements ou de l'équipement professionnel (médecins, dentistes...). Elles prennent également de gros intérêts dans l'immobilier en s'associant à des promoteurs ou à des sociétés de rénovation ou de gérance. Par exemple, elles ont été massivement associées à la réalisation du quartier de la Défense ou de la Tour Montparnasse mais également à la création de la plupart des villes nouvelles ou des stations de ski intégrées.

Avec l'émergence de l' "économie des marchés financiers" depuis les années 1980, leur rôle se redéfinit

Les banques deviennent des acteurs majeurs sur les marchés financiers, exerçant de nouveaux métiers : financement des grandes entreprises, gestion privée, conservation de titres, gestion collective (SICAV, FCP...). Aujourd'hui, les banques françaises réalisent environ 40% de leur chiffre d'affaires sur les marchés financiers, dans le cadre du financement dé-sintermédié, contre seulement 15% en 1984. Le crédit bancaire n'est pas mort pour autant puisqu'il entre encore pour 43% dans le financement externe des agents non financiers (ANF : entreprises non financières et ménages). Un héritage de l'exception bancaire française...

Certains domaines d'investissement risqués, comme l'immobilier, sont progressivement abandonnés : face à la récession qui a crevé la bulle spéculative à partir de 1990, l'État a en effet dû intervenir pour recapitaliser en totalité ou en partie la Banque Hervet, la Société marseillaise de crédit, l'UIC (filiale du GAN), le Crédit Lyonnais. Le recentrage des activités est bien illustré par Suez, qui abandonne le contrôle du CIC après sa nationalisation et se détourne de l'immobilier après avoir essuyé des pertes considérables.

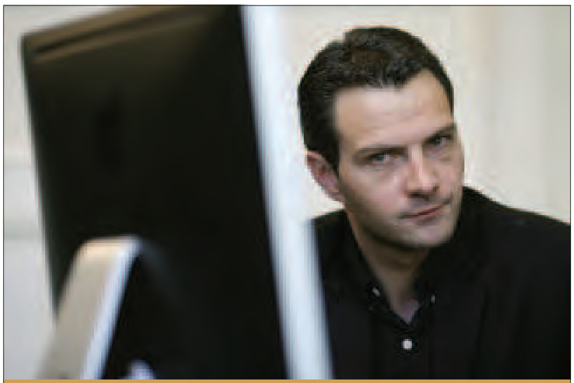
Inversement, le système de la "bancassurance" se développe ainsi nettement : les banques sont devenues des concurrentes des sociétés d'assurance en investissant le marché de l'assurance vie et de l'assurance dommages (par exemple le Crédit agricole avec sa filiale Pacifica).

Ces adaptations permettent aux banques françaises de gagner en compétitivité et rentabilité. Mais jusqu'où doit aller la prise de risque ?

A la fin des années 1980 et jusqu'au milieu des années 1990, les banques françaises affichent des résultats médiocres. Sur la période 1992-1995, les résultats nets rapportés aux capitaux propres des banques françaises se sont accrus en moyenne de 3%, à comparer aux 16% des banques allemandes et 17 à 22% des banques anglo-saxonnes. Ces résultats s'expliquent par la concurrence très âpre que se livrent les établissements de crédit ainsi que par une spéculation immobilière hasardeuse. De grandes banques françaises ont ainsi perdu des "plumes" en tentant l'aventure américaine : c'est le cas du Crédit Lyonnais condamné par la justice américaine dans une affaire de rachat frauduleux d'une compagnie d'assurance avant d'accepter de verser un dédommagement à l'amiable. Le groupe bancaire rebondit en changeant de nom et de logo (LCL) et en lançant une grande campagne publicitaire.

Des gains de productivité élevés sont réalisés depuis plus de cinq ans en lien avec les efforts de réorganisation effectués (resserrement des effectifs et fermeture de guichets, renforcement des provisions) et surtout grâce à la diffusion des nouvelles technologies (banque à distance, Internet, "image-chèque", portefeuille électronique...). La concentration est forte dans le secteur bancaire français : le rapprochement du Crédit agricole et du Crédit Lyonnais, autorisé en 2003, doit accoucher d'un des plus grands groupes mondiaux par le nombre de guichets, le premier d'Europe. Natixis naît en 2006 du regroupement des "banques de gros" de Banques populaires et de la Caisse d'Épargne. Des progrès importants restent à faire toutefois : les banques françaises continuent de payer aujourd'hui la "course aux guichets" effectuée dans les années 1970.

La crise des *supbprimes* vient secouer très brutalement le système bancaire français révélant de trop grosses prises de risques sur les marchés risqués (crédits hypothécaires). C'est notamment l'affaire Kerviel qui révèle de grave dysfonctionnements au sein de la Société Générale (5 milliards d'euros



Jérôme Kerviel (1977-)
Ancien trader à la "Société Générale" - DR

de pertes au total). D'autres banques affichent des pertes gigantesques, comme BNP Paribas et Natixis, et doivent faire appel à des aides spéciales de l'État, tout en s'engageant à se débarrasser des actifs toxiques et à réduire les bonus rémunérant les traders. Une enveloppe de 40 milliards d'euros est débloquée pour sauver le système bancaire.

C'est bien le modèle de la "banque universelle" qui tend à s'imposer en France, selon une évolution aujourd'hui mondiale. L'adaptation du système bancaire français à la montée des marchés financiers et à la concurrence mondiale s'est fait par la privatisation, le regroupement et la désintermédiation. La course actuelle à la concentration ne renforce-t-il pas le risque systémique lié aux faillites et n'est-elle pas une menace pour la concurrence, donc in fine, pour les consommateurs ?

C. T.

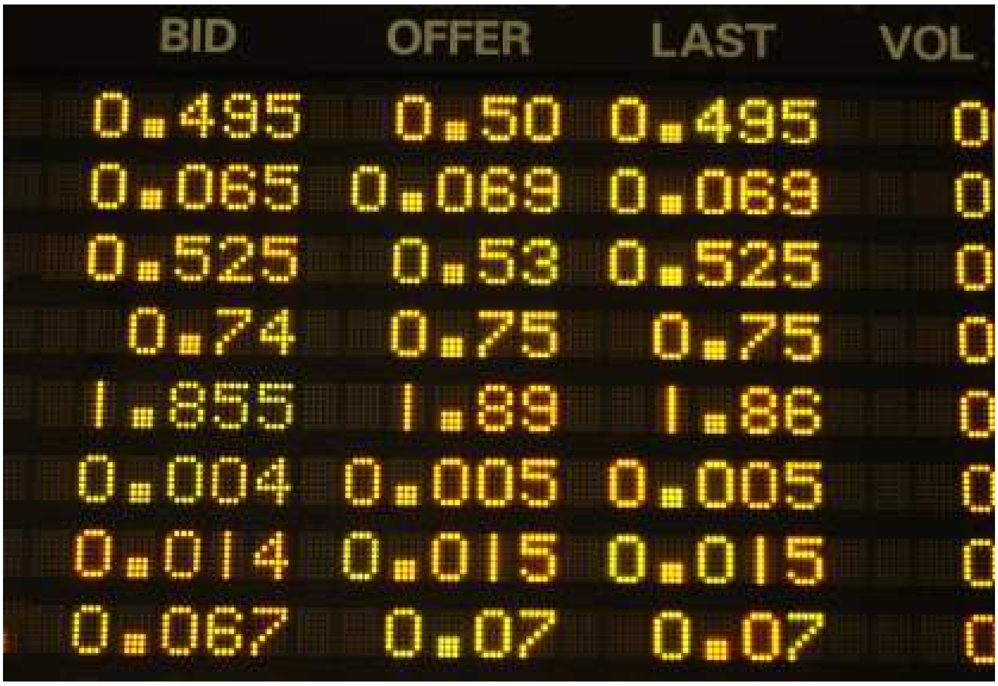
Les théories des crises financières

David Colle
Professeur d'économie en classes préparatoires HEC, Sciences Po et ENA

L'évolution économique semble devoir subir de manière récurrente l'éclatement de bulles financières. Toutes ces "crises" financières ne dégénèrent cependant pas en crise économique dépressionniste telle celle qui a fait suite au krach de 1929. Ainsi le krach boursier de 1987 n'a-t-il pas eu les effets escomptés alors et a-t-il semblé le révélateur que quelque chose avait changé, que des enseignements dans la manière de gérer les crises et de les prévenir avaient été tirés de l'expérience de 29. Pour autant, la finance n'a pas appris à éviter les bulles spéculatives. De l'éclatement de la bulle immobilière japonaise en 1990, de celle née de l'attrait des pays du sud-est asiatique en 1997 (notamment visibles dans les crises touchant les monnaies de Thaïlande et Malaisie), ou d'Amérique du Sud (crise du peso mexicain), de la crise financière touchant les États-Unis en été 1997 à celle d'octobre 1998 qui fait suite à la crise russe de l'été 1998, avant que la "nouvelle économie" ne laisse présager d'un nouveau Kondratieff et ne provoque l'euphorie des placements boursiers puis un nouvel éclatement, le NASDAQ étant divisé par 5 environ entre 2000 et 2002, le CAC 40 passant de 6.800 points en 2000 à 2500 début 2003 (3.600 en janvier 2004), les exemples ne manquent pas. Avant de souligner le rôle du comportement des acteurs du marché financier puis d'éclairer le rôle des Banques centrales dans ces processus, comment la théorie économique explique-t-elle ces crises ?

L'expression de la crise financière

Comment définir précisément la crise financière ? Les descriptions



et explications de ces types de crise par ceux qui l'ont choisie comme objet d'étude fournissent des éléments de réponse. Selon Marx, la thésaurisation devient la fonction monétaire prédominante lors d'une crise : alors que "l'argent" est remplacé dans les périodes d'investissement par des opérations de crédit et par de la monnaie scripturale, la crise voit le crédit se "resserrer", les lettres de change et les titres demandés à être convertis, l'argent apparaissant comme seul moyen de paiement désiré. Un actif particulier est recherché, considéré comme le plus liquide, comme l'expression de la richesse, comme la monnaie. Si le rôle du crédit bancaire est primordial, il ne faut pas mésestimer le rôle joué dans l'endettement par les crédits commerciaux. Selon Friedrich von Hayek (Prix et production, 1931), le système de crédit se présente sous l'aspect d'une pyramide inversée, bâtie sur les divers moyens d'échange que sont l'encaisse monétaire, les crédits de la Banque centrale, ceux des banques commerciales et les crédits commerciaux hors banque. Une substitution généralisée de monnaie scripturale à de la monnaie centrale se produit lors des crises financières, manifestant la panique et un comportement de fuite devant la monnaie scripturale. Dans la crise, les entreprises cherchent à se faire rembourser leurs créances commerciales, les banques, leurs crédits, tandis que les déposants cherchent, en se ruant aux guichets, à matérialiser leur richesse, à la rendre "tangible". Tous manifestent une volonté effective de convertir les formes de moyens de paiement scripturaux en monnaie centrale. Cela peut conduire à l'impossibilité de satisfaire cette volonté et d'assurer cette convertibilité, jusqu'à la suspension de la convertibilité des dépôts en monnaie. Comment en arrive-t-on là ?

Friedrich Von Hayek
1899-1992 (DR)

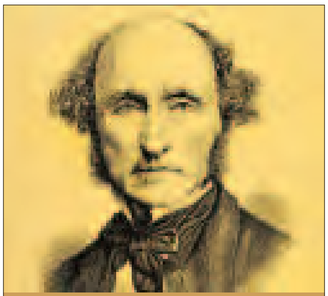
Kindleberger (Histoire mondiale de la spéculation financière, 1989), souligne qu'une des questions posée par l'analyse des crises financières est de savoir si une causa proxima (immédiate) à une causa remota (profonde) doit être privilégiée. Il s'agit de distinguer ce qui fait référence au retournement des tendances qui fait passer de l'euphorie à la débâcle, du boom à la crise, et ce qui fait référence aux causes profondes de la crise, c'est-à-dire à des principes généraux comme le crédit bancaire, la création de monnaie, la liquidité, l'endettement ou la spéculation. Lorsque les auteurs (Marx, Allais, Hayek) s'attachent à identifier ces causes profondes, ils sont souvent conduit à formuler des propositions de réforme (voire de révolution dans le cas de Marx) remettant en cause l'organisation monétaire elle-même (suppression du pouvoir de création monétaire des banques pour Allais, ou à l'inverse, suppression de la monnaie centrale pour Hayek).

Si l'on veut s'en tenir à l'analyse des crises, il apparaît que la crise n'est qu'un moment particulier au sein d'un processus et qu'elle n'est explicable qu'en prenant en considération la période qui la précède. La crise apparaît comme l'aboutissement d'un processus, le mode de financement d'une période qualifiée de boom, d'euphorie des affaires, expliquant que le processus puisse aboutir, au terme d'un retournement de tendances, à une crise financière.

Le "boom" des affaires et son financement

Selon Kindleberger, on remarque souvent des phénomènes de "déplacement" à l'origine des périodes précédant les crises financières. Une guerre, des bouleversements politiques importants, une baisse des taux d'intérêt due aux besoins d'amortissement des dettes publiques qui pousse les investisseurs à trouver d'autres sources de revenus, une brutale chute du coût des nouveaux instruments financiers, une création monétaire soudainement excessive, des conversions forcées de titres de dette publique, des émissions de titres qui prennent des proportions inattendues, sont autant de phénomènes dits de déplacement qui marquent le début des processus de crise. Cette période est appréhendée et qualifiée de diverses manières selon les auteurs, déformation de la structure de production selon Hayek, boom de l'investissement ou euphorie spéculative selon Irving Fischer (La théorie des grandes dépressions par la dette et la déflation, article de 1933), Hyman Minsky (L'hypothèse d'instabilité financière, article de 1982) ou Kindleberger.

Selon Maurice Allais, toutes les grandes crises des dix-neuvième et vingtième siècle semblent avoir résulté du développement excessif du crédit, des promesses de payer et de leur monétisation. Le crédit joue un rôle essentiel dans cette période faste pour les affaires. Hawtrey juge la période d'essor imputable au niveau des taux d'intérêt. Dès lors que le taux d'intérêt semble attractif, les négociants veulent augmenter leurs stocks, ce qui incite les producteurs à augmenter leur production. Grâce au crédit bancaire, la demande des négociants et l'investissement des producteurs sont financés et un cercle vertueux de demande, d'investissement et d'emploi se met en place. Cette période manifeste, comme le remarquait John Stuart Mill, une volonté de prêter plus grande qu'à l'habitude, mais elle doit cesser, et les tendances l'ayant entretenue finir par s'inverser : l'essor se termine avec la fin de l'inclination à prêter. Il arrive un moment où les banques se refusent à octroyer des crédits et où la croissance de la masse monétaire ne peut plus se poursuivre.



John Stuart Mill
(1806-1873)
DR

Pour Minsky, le retournement signale la fin du boom, pour Hayek le retour à une saine structure de production, pour Fischer l'imminence d'une déflation par la dette. Ce retournement est la première manifestation d'une crise financière qui attendait son heure. Trois phénomènes peuvent être associés au retournement des tendances.

Le retournement des tendances

La fin de la croissance de la masse monétaire

M. Friedman et P. Cagan, les monétaristes en général, font de la crise financière, comme de l'inflation, un phénomène strictement monétaire. Les variations du taux de croissance de la masse monétaire sont responsables des phases euphoriques comme des crises. Seule une croissance stable et régulière de la quantité de monnaie pourrait l'éviter, car si une lutte contre la dépression provoque l'inflation, une lutte effrénée contre l'inflation par une restriction monétaire se solde par une déflation dangereuse. Les défaillances des responsables ultimes de l'offre de monnaie constituent donc la cause de la crise. Les "erreurs", par nature exogènes, de politique monétaire, sauraient-elles suffire à bâtir une théorie des crises ? D'autres auteurs préfèrent trouver des causes endogènes au retournement.

A l'époque de l'étalon-or, Hawtrey (La théorie monétaire du cycle du commerce, 1927) expliquait ce retournement inéluctable par l'existence d'une barrière monétaire rendant inéluctable la fin de l'essor puis la dépression (donc l'existence de cycles). Aucune banque ne saurait accorder indéfiniment plus de crédits que ses concurrentes : son encaisse-or diminuant, sa politique commerciale revient toujours à élever ses taux d'intérêt et à restreindre ses prêts : la limite physique imposée par la ressource tarissable qu'est le métal précieux, et en qui les détenteurs de billets et de dépôts voient la richesse sous-jacente, vient inévitablement provoquer le retournement des taux d'intérêt et du crédit, et la dépression qui doit se dénouer par une crise financière.

Pour von Mises (Théorie de la monnaie et du crédit, 1912) et Hayek, si le système monétaire connaît des crises financières, ce n'est pas en raison du reliquat métallique mais en raison d'un mode de financement artificiel particulièrement malsain. Lorsque c'est l'épargne volontaire qui augmente pour financer le surcroît d'investissement, la demande de biens de consommation diminue relativement à celle de biens de production. Lorsque c'est l'augmentation de la quantité de monnaie provenant de crédits à la production qui vient financer l'accroissement de la demande de biens de production, l'augmentation de la production qui s'effectue au détriment de celle de biens de consommation représente un sacrifice qui n'a rien de volontaire, au contraire du financement par l'épargne, synonyme de demande de biens de production, qui exprime un choix volontaire donc durable de la modification des choix de production. La crise s'explique par la nécessité de revenir à la structure de production initiale, artificiellement modifiée par le crédit. Le mode de financement monétaire des investissements est donc en lui-même la cause première de la crise, qui vient prouver a posteriori le caractère artificiel des méthodes plus capitalistiques de production lorsqu'elles sont financées par création monétaire. La structure de production plus capitalistique qui résulte du crédit bancaire n'est pas désirée, et doit à terme redevenir normale, rationnelle, au prix d'une crise correctrice. Si le crédit bancaire la cause profonde de la crise, la cause immédiate du retournement réside dans la fin de l'accroissement de la masse monétaire. C'est l'impossibilité soudaine pour le crédit bancaire de poursuivre sa fuite en avant, et donc l'incapacité pour la masse monétaire de croître indéfiniment, qui précipite le système financier dans la crise.

Baisse de la liquidité et retournement des taux d'intérêt

A cette évolution de la masse monétaire, correspond l'élévation des taux d'intérêt, qui manifeste essentiellement les réticences avec lesquelles les banques souhaitent continuer à octroyer des crédits. Le véritable problème posé à la phase d'euphorie, qui explique la hausse des taux d'intérêt, réside selon Minsky dans un mode de financement qui dégrade la liquidité globale de l'économie. Kalecki *(Essai d'une théorie du mouvement cyclique des affaires*, article 1935) avait déjà souligné, dans une perspective plus microéconomique, qu'une hausse de l'investissement nécessite une augmentation des capitaux empruntés par rapport aux capitaux propres des bilans. La garantie des emprunteurs n'étant pas le capital immobilisé mais les capitaux propres liquides, non investis, la phase d'investissement cause nécessairement la baisse du rapport du capital propre liquide au capital emprunté. Aussi le risque de faillite augmente-t-il, et avec lui le taux d'intérêt. La phase d'investissement soutenu et de croissance tend donc à générer ses propres freins financiers.

Pour Minsky, il existe certes une alternative entre un financement par une épargne préalable – qui prend l'expression d'activation de liquidités oisives – et un financement par création monétaire, mais le financement de la vague profitable ne saurait se faire sans une hausse de l'endettement global, lequel contribue à dégrader la structure financière et la liquidité globale de l'économie. Les économies à systèmes financiers développés souffrent ainsi d'une instabilité intrinsèque en raison d'une fragilisation financière endogène au cours d'une période de croissance. En diminuant les liquidités relativement au volume de titres, le boom développe en effet une structure financière instable : la baisse de la quantité de moyens de paiement par rapport aux engagements – la liquidité globale – élève le risque global de défaut. La crise – ainsi que la liquidation des dettes qui la caractérise – semble donc étroitement dépendante du mode de financement de l'investissement qu'autorise l'organisation monétaire des économies capitalistes et qui autorise la période d'euphorie des affaires. Le resserrement du crédit ou la hausse des taux d'intérêt ne sont cependant pas les manifestations de la crise financière en elle-même.

La déflation par la dette

Selon Irving Fischer, la crise débute véritablement par une volonté générale de liquidation des dettes, dont le montant global apparaît soudainement trop important. Les débiteurs aspirent à diminuer leur position et le remboursement de prêts bancaires se conjugue à la raréfaction des flux de crédits pour que, la monnaie de dépôts diminuant, le niveau général des prix diminue lui-aussi (n'oublions pas que Fischer accorde du crédit à la théorie quantitative de la monnaie). Les profits diminuent à leur tour avant que des pertes ne surviennent, contribuant encore à la contraction de la quantité de monnaie en circulation. Les taux d'intérêt nominaux sont orientés à la baisse alors que les taux réels s'élèvent avec la baisse des prix. Sans l'existence d'un endettement important, cette déflation ne serait pas grave, mais causée par un surendettement, elle rétroagit sur cet endettement et augmente la valeur réelle des dettes, la liquidation des dettes ne pouvant pas suivre le rythme de la chute des prix qu'elle-même provoque. La diminution du stock de dettes par la liquidation est surcompensée par la valorisation de la dette restante, causée par la baisse des prix, ce qui oblige les débiteurs à rembourser plus qu'ils ne devaient. Surproduction, sous consommation, surinvestissement, excès d'épargne... ne sont ainsi pour Irving Fischer que des acteurs de second plan. La fin de la vague spéculative ne fait que sonner le "sauve qui peut", incitant les débiteurs à vendre des actifs en catastrophe afin de pouvoir rembourser leurs dettes, causant ainsi eux-mêmes la baisse des prix qui leur sera préjudiciable. Ainsi Fischer explique-t-il le processus dramatique de la crise de 1929.

La cause profonde de la crise réside dans l'endettement ; c'est lui qui, pouvant dégénérer en des situations de surendettement avec la baisse des prix, précipite le système financier dans la crise, en provoquant une inquiétude généralisée des créanciers et des débiteurs qui réduisent alors leurs positions financières respectives. C'est ainsi à cause de ce surendettement – relatif à des variables comme la richesse nationale, le revenu national, et surtout l'offre d'or –, que s'enclenchent les différents processus propres aux crises financières. Le surinvestissement et l'excès de spéculation sont souvent importants mais ils auraient des conséquences bien moins graves s'ils n'étaient pas effectués avec de l'argent emprunté. Il en va de même pour l'excès de confiance qui n'est pas souvent dangereux sauf lorsqu'il incite ses victimes à s'endetter.

La crise financière est pour Fischer le résultat d'un processus d'euphorie permis par l'endettement, qui contient en lui-même les germes de sa propre fin puisqu'il provoque une volonté généralisée des ces mêmes agents d'annuler, au bout d'un certain temps, leurs positions financières. Ainsi alternent booms et dépressions. La spéculation, les malversations ne font qu'aggraver ou précipiter le situation sans constituer des causes profondes de la crise : les dettes sont la cause profonde de la crise, déclenchée par une volonté soudaine et partagée de liquider ces mêmes dettes.

Ainsi les économies monétaires semblent devoir souffrir d'une instabilité intrinsèque en raison d'une fragilisation financière endogène au cours d'une période de croissance. Le boom des affaires génère un volume de crédit que les bases monétaires ne sauraient assurer (Marx, Hayek), un stock global de dettes que les agents ne peuvent que vouloir réduire un jour ou l'autre (Fischer), ou encore une baisse du rapport entre le capital propre liquide et le capital emprunté donc une hausse du risque de faillite (Kalecki) ; il implique une hausse de l'endettement global et une structure financière globale fragilisée par la baisse de la quantité de moyens de paiement par rapport aux engagements (Minsky).

D. C.

Les premières leçons de la crise des “subprime” (en attendant les autres)

David Colle
Professeur d'économie en classes préparatoires HEC, Sciences Po et ENA

Les trois ressorts de la crise

La crise dite des “subprime”, a plusieurs ressorts. Le premier relie emprunteurs et prêteurs initiaux. De ce point de vue, trois caractéristiques doivent être mentionnées. Il s'agit de crédits dits *hypothécaires* octroyés à des ménages *pauvres*, et pour partie à *taux variable*. L'apport personnel des emprunteurs est faible voire nul. Cette caractéristique n'augmente en rien le risque de crise en soi : le microcrédit a bien montré que la probabilité de remboursement n'est pas directement liée aux capacités financières initiales, les “pauvres” remboursant leurs dettes au moins aussi bien que les “riches”. Le risque de défaut dépend en définitive davantage de la sûreté d'emploi et donc de la source de revenus que du salaire lié à cet emploi. Mais le fait que ces crédits soient hypothécaires rend la solvabilité des débiteurs très étroitement dépendants de l'évolution du prix du bien immobilier qui a donné lieu à l'emprunt. Que le prix s'élève plus vite que le taux d'intérêt et la solvabilité de l'emprunteur s'améliore mécaniquement ; mais si le prix baisse, la charge de la dette rapportée à ses flux de revenus s'élève pour le placer en situation d'illiquidité (incapacité à assurer les échéances) avant que la dette (capital plus intérêts actualisés) rapportée au patrimoine brut de l'emprunteur ne provoque son insolvabilité (insuffisance de la valeur des actifs par rapport à la dette à rembourser). Enfin, le fait que ces crédits aient été en grande partie octroyés à taux variable les rendaient très dépendants de la conjoncture et du retournement d'une politique monétaire plus soucieuse du taux d'utilisation des capacités de production et du risque d'inflation. Les taux au moment des emprunts étaient bas et personne n'aurait dû avoir envie de s'endetter à taux variable, la probabilité qu'ils baissent entre-temps étant très faible ; mais il semblerait d'une part que certains organismes prêteurs aient profité de la méconnaissance pour ne pas dire naïveté des emprunteurs et d'autre part qu'ils aient conditionné l'octroi de prêt au fait qu'une partie soit souscrite à taux variable. Si cela devait s'avérer le cas, on pourrait aller jusqu'à penser que certains créanciers peu scrupuleux “endettent” inconsidérément les débiteurs en espérant récupérer des actifs immobiliers à des prix dépréciés, en cas de hausse plus que probable de taux...

Le deuxième ressort de cette crise concerne la titrisation et relie donc les emprunteurs à des prêteurs “secondaires”. Par la titrisation, les prêteurs initiaux transforment des créances en titres et se défont en quelque sorte du risque sur des investisseurs qui vont voir dans ces titres risqués un moyen de diversifier leurs portefeuilles (un “bon” portefeuille associe des titres qui vont de peu rémunérateurs mais faiblement risqués et très rémunérateurs mais très risqués et ce, sur des secteurs d'activité divers et, on l'espère, peu corrélés). Des véhicules de titrisation (SPV, Special Purpose Vehicle ou SIV, Special Investment Vehicle) émettent, pour financer leur acquisition, des obligations qui permettent au prêteur de disséminer en quelque sorte le risque initial élevé entre plusieurs agents désireux de placer leur épargne par le biais de fonds d'investissement. Les subprime ont été cédés à 80% à de tels SIV dont certains sont créés par des banques elles-mêmes pour sortir des créances de leur bilan et éviter ainsi d'avoir à augmenter les fonds propres en proportion. En théorie, cette dissémination du risque peut s'avérer positive. Cependant, le moins que l'on puisse constater en pratique, c'est que les règles de prudence n'ont pas été très suivies par les fonds d'investissement des plus grandes banques, dont la plupart, en particulier aux États-Unis depuis la fin du Glass Steagle Act en 1999, peuvent associer activité de dépôts et d'affaires. La crise a débuté avec les difficultés rencontrées par deux hedge funds très endettés gérés par la banque américaine Bear Stearns.

Mais c'est à leur suite l'ensemble des systèmes bancaires qui ont été affectés, de par l'interdépendance entre les banques des systèmes bancaires nationaux mais aussi à l'échelle internationale, leur nécessité d'avoir accès aux liquidités interbancaires, et le risque de contagion qui se déduit des dettes et créances interbancaires, sans parler des déposants qui risquent de perdre confiance dans le système bancaire et d'adopter un comportement "à la Cantona" en allant retirer leurs dépôts, ce qui aggrave encore le risque d'illiquidité.

Le troisième ressort relie justement agences de notations et fonds d'investissement. Des agences indépendantes (Moddy's, Standard & Poor's, Fitch) sont supposées informer les épargnants et investisseurs sur le risque afférent aux emprunteurs. Elles ont manifestement échoué à évaluer correctement les risques assumés par les fonds d'investissement des grandes banques.

Carter Glass (1858-1946)
Secrétaire d'État au Trésor
Sénateur démocrate de Virginie (1920-1946)

Henry Bascom Steagall (1873-1943)
Élu démocrate de l'Alabama
à la Chambre des Représentants (1915-1943)

Initiateurs du "Glass-Steagall Act" (ou "Banking Act") de 1933 (séparation des banques de dépôt et d'investissement, système fédéral d'assurance des dépôts bancaires, plafonnement des taux sur les dépôts bancaires).

(1) Entre 1974 et 1980, aux États-Unis, 1970 et 1981 au Royaume-Uni, 1974 et 1981 en France, en 1972 et 1975 en Allemagne.

Prêter est risqué

La distinction proposée par Hicks *(La crise de l'économie keynésienne*, 1973) entre économie d'endettement et économie de marchés financiers est, d'un point de vue méthodologique, très utile alors même qu'elle simplifie la réalité puisque les deux types d'économie coexistent. Alors que dans l'économie d'endettement, une partie prépondérante des financements obtenus par les entreprises le sont par recours au crédit bancaire, l'émission de titres (actions, obligations...) est privilégiée dans l'économie de marchés financiers. L'idée de désintermédiation ne fait pas référence à une dichotomie entre les deux modes de financements externes que constituent l'émission de titres et l'emprunt bancaire mais à un balancier, depuis les années quatre-vingt, en faveur du second. Ce mouvement, combiné à ceux de décloisonnement et de dérégulation, s'est vu justifié de diverses manières.

L'économie d'endettement est en premier lieu caractéristique d'un mode de croissance qui semblait avoir fait son temps : celui des Trente Glorieuses durant lesquelles les débiteurs pouvaient profiter d'une différence positive entre une rentabilité économique (excédent brut d'exploitation/capital investi) et un taux d'intérêt rendu faible voire négatif à certaines périodes en termes réels[1] par une inflation assez "tolérée". Chaque débiteur pouvait ainsi anticiper de vendre plus cher et de manière profitable ce que des investissements, financés par emprunt, lui permettaient de produire : un effet de levier jouait en faveur des entreprises et finalement de la croissance, dans une vision toute keynésienne (les rentiers et débiteurs devaient, en l'occasion, rester silencieux face à leur "euthanasie"). Cette intermédiation est venue buter sur trois écueils, l'un pratique, les deux autres plutôt théoriques.

Le premier est l'inflation qui s'accélère à partir de la fin des années soixante et au cours des années soixante-dix avec les chocs pétroliers et les afflux de dollars causés par la baisse de compétitivité des États-Unis. Alors que les crédits créent de la monnaie avant d'en détruire lors du remboursement, les titres se contentent de la faire circuler, des souscripteurs vers les émetteurs sur le marché primaire (celui de l'émission), de main en main sur le marché secondaire (si les titres sont négociables).

Le deuxième est le risque croissant que peut susciter le recours au crédit. D'un point de vue microéconomique, le théorème de Modigliani-Miller (1958) soutient que, avec des hypothèses plusieurs fois révisées, le fait pour une entreprise de s'endetter ou d'augmenter ses fonds propres pour investir est sans effet pour la valeur économique de ses actifs. Peut-être irréfutable du point de vue théorique, cette démonstration semble cependant peu acceptée dans la pratique. Or il n'en va pas en ce domaine dans les sciences sociales comme dans les sciences dures : pour qu'une "loi" économique en soit une, il faut encore que les agents en acceptent la démonstration et qu'ils acceptent par ailleurs l'idée et que ces actifs puissent être objectivement évalués. On trouve ainsi chez Kalecki (1933) du point de vue de l'entreprise, et d'un point de vue plus macroéconomique chez Hayek (1931), Fischer (1933) ou Minsky (1982) des raisons de penser que les créanciers, bancaires notamment, ont tout lieu de s'inquiéter d'un endettement croissant de leurs débiteurs et de leur exposition au risque par rapport aux fonds propres. Hayek considère qu'à cause de la possibilité laissée au système bancaire de financer des investissements de manière indépendante de l'épargne préalable, les entreprises sont conduites à développer des méthodes de plus en plus "détournées" de production. Le détour symbolise le fait que le système productif grandit par le biais de secteurs intermédiaires entre le secteur le plus en aval des biens de consommation et le plus en amont des matières premières : ainsi ce détour croissant reflète-t-il en quelque sorte un surinvestissement. Ce processus n'est pas durable selon Hayek, le retournement des tendances au crédit devant un jour ou l'autre intervenir pour stopper l'expansion et causer une crise, faute d'une possibilité laissée à certaines entreprises endettées de rembourser leurs dettes. Irving Fischer soutient ainsi que la grande dépression des années trente est le fruit d'un endettement trop important, qui finit par causer une hausse des taux d'intérêt pour freiner le crédit. Fischer, par ailleurs défenseur de la théorie quantitative de la monnaie, remarque alors que la baisse des prix consécutive à la diminution du crédit, cause en fait un processus pervers qui peut conjuguer baisse de la dette nominale mais hausse de la dette réelle. Les agents, devenus inquiets de leur solvabilité, cherchent à rembourser des dettes qui deviennent de plus en plus difficiles à rembourser, la baisse des prix, donc des prix de vente, éventuellement des salaires...) s'avérant plus rapide que les remboursements. Il revient à Minsky d'avoir en quelque sorte synthétisé ces approches en développant l'idée d'une instabilité financière intrinsèque au mode de financement des investissements dans des économies capitalistes. Selon Minsky, il est inévitable qu'une phase de croissance, et donc de croissance de l'investissement, suscite un accroissement des moyens de financement, une "activation de monnaie oisive", par des innovations financières ou le crédit. Mais ce processus génère, de manière endogène, une contre-tendance : la hausse du ou des taux d'intérêt vient inévitablement, au bout d'un certain temps, raréfier le crédit et provoquer le retournement de toutes les tendances (crédit, endettement, investissement, production et finalement croissance). Au cours de cette phase en effet, les financements ont tendance à changer de nature : de "sains" au début de la phase d'expansion, c'est-à-dire permettant des investissements à la rentabilité avérée (ou en tout cas assez bien anticipée), les financements ont tendance à devenir "spéculatifs" et permettre des investissements à la rentabilité de plus en plus incertaine ; ils deviendront même de type “ponzi” [2] lorsqu’ils n’auront d’autre but que de permettre aux débiteurs de rembourser des dettes antérieurement contractées. On peut d’ailleurs relier la hausse des taux d’intérêt, le retournement n’étant pas forcément brutal, et la hausse du risque des investissements et des financements : si les taux d’intérêt s’élèvent progressivement avec l’endettement, soit à l’initiative de la Banque centrale qui veut freiner les risques d’inflation et d’instabilité financière, soit à l’initiative des banques secondaires elles-mêmes qui commencent à s’inquiéter de leur exposition, les investisseurs doivent sélectionner des investissements de plus en plus rentables et donc plus risqués.

Un parallèle est possible entre cette théorie et la distinction de Knight entre risque et incertitude. Si dans un premier temps les investissements et les financements qui les autorisent sont fondés sur un risque probabilisable, la phase d’euphorie les transforment tous deux en actes incertains, assumés comme tels dans un mouvement de fuite en avant. Celle-ci, fondée un temps sur la volonté, devient elle-même une contrainte une fois le caractère douteux des créances avéré et la quasi-obligation pour les créanciers de reporter leur position faute de vouloir admettre des pertes immédiates. S’il faut, en quelque sorte, être le premier à profiter d’une hausse anticipée (des cours, des rendements, de la croissance), il faut éviter d’être le premier à admettre l’erreur, éviter d’être celui par qui le scandale arrive. Le degré concurrentiel d’un système bancaire n’est sans doute pas étranger à cette possible dérive : si l’on distingue pour simplifier trois types de projets d’investissement (sûr, risqué, totalement incertain), chaque banquier sait devoir arbitrer, concernant un prêt risqué mais potentiellement rentable, entre accepter et gérer le risque ou refuser de prêter mais voir le débiteur obtenir son prêt chez un concurrent et finalement s’avérer rentable. Il ne faut pas “louper” la bonne affaire.

Ceci amène au troisième biais qui peut affecter l’économie d’endettement. Stiglitz et Weiss (1981) ont montré qu’au-dessus d’un certain seuil, l’augmentation du taux d’intérêt bancaire n’augmente plus comme on pourrait le penser le rendement attendu des prêts. Il augmente en effet le risque de défaut des emprunteurs. Si le taux d’intérêt “idéal”, maximisant le rendement attendu, se trouve correspondre à une demande de prêt plus importante que l’offre à ce taux, il apparaît un rationnement du crédit.

Ce phénomène est le résultat du phénomène d’asymétries d’information développé par Akerlof (1970)[3]. Ces asymétries, concernant les relations entre des débiteurs (qui connaissent le degré de risque de leur projet et leur aversion pour le risque) et des banques (qui ont une connaissance imparfaite du risque du projet et du débiteur lui-même), peuvent conduire à un phénomène d’*anti-sélection.*

George Akerlof (1940-)
Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d’Alfred Nobel (“Prix Nobel”) 2001 avec Joseph Eugene Stiglitz et Michael Spence

En effet, si les banques savent devoir faire face à des emprunteurs risqués et peu risqués (pour simplifier dans les mêmes proportions), elles sont conduites à proposer des taux d’intérêt d’emprunts “moyens” qui vont décourager les emprunteurs peu risqués de faire appel à elles pour obtenir les financements, préférant se financer sur les marchés de titres ; les banques ne vont finalement conserver dans leurs clients que les emprunteurs risqués, pour lesquels le taux d’intérêt serait d’ailleurs encore trop faible. Augmenter les taux d’intérêt pesant sur les emprunts ne permettrait aux banques qu’inciter les investisseurs à une prise de risque supplémentaire. Un second risque, d’*aléa moral*, s’explique ainsi par le fait qu’il est possible à l‘emprunteur d’agir, une fois le crédit obtenu, différemment de ce qui avait été prévu, de ne pas “respecter” ce risque.

Les marchés financiers, qui pourraient “récupérer” les bons emprun-

(2) Du nom d’un financier qui promettait, en 1920, à des épargnants, un rendement de 50% des placements en 45 jours en se contentant d’utiliser l’argent des nouveaux souscripteurs pour rembourser les anciens.

(3) Concernant le marché des voitures d’occasion (the lemons market).


Le "Trading Floor" du New-York Stock Exchange (Photo © NYSE)

teurs, sont-ils garant d'une plus grande stabilité financière et d'une meilleure allocation des ressources financières ?

Évaluer est incertain

Les asymétries d'information qui biaisent les relations entre banques et emprunteurs ont tout lieu de caractériser aussi si ce n'est plus encore les relations entre emprunteurs et actionnaires ou créanciers non bancaires. Les moyens à disposition des banques sont en effet plus importants en matière de collecte d'information et d'évaluation des risques que ceux d'épargnants individuels et éventuellement même que ceux des grands fonds d'investissement. Le fait que la désintermédiation soit plutôt de "façade", qu'elle a surtout conduit les banques à délaisser leur rôle direct d'allocation de crédits au profit d'un rôle de véritable intermédiaire, allocateur d'épargne, s'explique aussi par cette capacité informative. Mais le marché financier dispose d'un "avantage" sur les banques en ceci qu'il peut bien plus rapidement se désengager, vendre des titres d'entreprises en lesquelles il perd confiance, qu'une banque qui a prêté à long terme et peut, au mieux, revoir les termes des prêts et au pire devoir renoncer à sa créance. Ceci a pu faire penser que les emprunteurs seraient dès lors, beaucoup plus incités à "respecter" le risque prévu et à ne pas profiter d'asymétries d'information en leur faveur. L'expérience n'est pas particulièrement concluante, ce qui remet en question l'hypothèse d'efficience du marché financier (Fama) : "Sur un marché efficient, la concurrence que se livre un grand nombre d'opérateurs avisés, crée une situation dans laquelle, à chaque instant, le prix des différentes valeurs reflètent les effets de l'information basée d'un part sur des événements qui se sont déjà produits, et d'autre part, sur des évènements que le marché s'attend à voir dans le futur." Le prix présent d'un actif reflèterait parfaitement les revenus futurs (actualisés) qu'il devrait générer. A la limite, un marché toujours parfaitement efficient n'aurait pas à se soucier du cours passé, il se projetterait uniquement dans l'avenir puisque le cours passé ne ferait lui-même que refléter ce qui est aujourd'hui le présent. Et tout le monde aurait accès à cette parfaite information disponible gratuitement. Or, plusieurs biais sont relevés par la finance comportementale et constituent des anomalies constatées sur les marchés financiers (Schwert, 2003) : biais de confirmation (Festinger, 1957), biais d'optimisme (Miller, 1977), biais de cadrage (Tversky 1986), biais de familiarité (Heath et Tversky, 1991), biais de représentativité et effet *momentum* (Titman, 1993), biais de conservatisme (Schleifer, Vishny, 1998), excès de confiance et auto-attribution (Daniel, Hirshleifer, 1998), effet de disposition (Grinblatt 2001). D'autres sont sans doute à déceler...

Au delà de ces biais, plusieurs facteurs remettent en question l'idée d'efficience. En premier lieu, certains intervenants sur le marché croient pouvoir déceler, au moyen de logiciels de plus en plus sophistiqués, dans une analyse historique et graphique des titres, leurs tendances futures, à moyen ou long terme. Ils n'ont donc déjà plus foi en un marché parfaitement efficient. Si la tendance à court terme décroche de celle de long terme (comme la hausse des titres de sociétés du NASDAQ partir de 1998 par rapport à la hausse régulière sur la décennie et en rapport à la hausse de productivité), chaque agent peut finir par juger plus probable et imminente par une simple analyse graphique une correction future. L'évolution passée, historique, du cours, finit par l'influencer davantage que l'information présente qui devrait pourtant incorporer toute l'information. Peut-être ont-ils tort mais le dire n'avance à rien. Ils sont libres de déterminer leurs critères de choix.

En deuxième lieu, pour échanger un titre dont la valeur d'usage est nulle, indépendamment de circonstances forcées (vendre des titres pour payer ses impôts suite à un contrôle fiscal, la pension alimentaire de son divorce... en contradiction avec des anticipations à la hausse de leur cours) il faut que ceux qui l'échangent formulent des anticipations différentes sur l'évolution future de ce titre (le vendeur pense qu'il va baisser, l'acheteur qu'il va monter) ou d'un autre actif (le vendeur pense qu'il vaut mieux vendre ce titre pour acquérir un autre actif aux perspectives plus intéressantes, l'acheteur pense le contraire). Les spéculateurs "purs" sont censés, en ce domaine, avoir une action stabilisante pour le marché : leur horizon temporel peut être tel qu'ils perçoivent déjà derrière une hausse, la baisse à venir et derrière la baisse, une hausse future. Leurs actes d'achat et de vente sont donc censés limiter les fluctuations à des marges autour d'une "valeur" du titre qu'ils estiment "fondamentale", objective, fondée sur des perspectives de revenus futurs voire plus globalement encore de croissance globale de l'économie (Tirole, 1982). Cela supposerait qu'ils travaillent pour eux-mêmes et ne soient pas mis en compétition ; et qu'ils ne soient pas enclins à un autre type de spéculation. Or, d'autres agents[4] ne font que suivre en quelque sorte ces spéculateurs professionnels, réagissant avec retard et voulant profiter d'une hausse et s'évader d'une baisse une fois qu'elles sont déjà enclenchées. Eux peuvent être d'autant plus actifs que les cours s'éloignent déjà dans une certaine mesure de la marge de fluctuation considérée comme normale autour de la valeur fondamentale. En temps normal, le spéculateur "pur" peut faire son travail mais, passé certains seuils, au-dessus ou au-dessous de ce qu'il estime être une fluctuation "normale", il peut cesser d'agir "normalement" et réagir lui-aussi au bruit ambiant. "Ils sont complètement fous" aurait dit Ivar Kreuger constatant la hausse du cours des actions de ses propres firmes au début de 1929. Pas exactement en fait. Peut-être agit-il toujours comme un professionnel, conscient que cette déconnexion est anormale ; mais il y a peut-être quelque chose à en tirer. Ceci constitue, après tout, son travail et sans doute est-il d'ailleurs rémunéré en fonction de ce résultat ; et dans le monde d'aujourd'hui, il subsiste peu d'incitations à gérer ses portefeuilles en "bon père de famille". Peu importe qu'il ait une parfaite conscience que cette hausse de cours soit irrationnelle s'il peut acheter et profiter de la hausse avant qu'elle ne cesse[5]...

Jean Tirole (1953-)
Président de la fondation Jean-Jacques Laffont - Toulouse Sciences économiques
Directeur scientifique de l'Institut d'Économie Industrielle (Toulouse) - DR

Il pense ne pas être victime, comme les autres, de cette illusion, il a conscience que cette hausse est sans doute sans fondement véritable mais il en profite ; étant lui-même rationnel, il se dit qu'il saura percevoir le moment où il faudra vendre avant que les autres ne le fassent. Acheter avant les autres, vendre avant les autres, qu'il faut pouvoir supposer moins intelligents que soi. La bourse peut vite ressembler à un rassemblement de gens intelligents et rationnels mais qui, tous, "jouent au plus malin". La sagesse veut que l'on prenne au sérieux son travail sans se prendre au sérieux ; dans le sérieux de leur travail, ils se prennent désormais trop au sérieux et participent à l'apparition d'une bulle mimétique.

En troisième lieu, les marchés financiers sont affectés, comme le système bancaire d'un risque systémique. Les évolutions de taux d'intérêt expliquent que des réaffectations importantes d'épargne puissent se produire du marché d'actions vers le marché obligataire : en cas de hausse de taux d'intérêt par exemple, un krach peut se produire sur les actions existantes mais attirer l'épargne vers les nouvelles émissions en même temps que cette hausse peut freiner les investissements et les perspectives de profit. Mais ce n'est pas la seule raison. Le langage courant véhicule l'expression *la* bourse comme pour signifier l'interdépendance de fait entre les différents titres qui y sont échangés. Alors qu'en temps normal, il peut s'agir d'arbitrer entre les rendements de différentes actions pour vendre l'une au profit d'une autre, la situation de crise manifeste une désaffection vis-à-

(4) Aglietta (2005) les qualifie de "noisy traders".

(5) Certains cours étant d'ailleurs bornés temporellement comme les obligations qui, à échéance, seront remboursés à une valeur prévue par avance, ne devraient a priori pas faire l'objet d'une intense spéculation. Ils en font pourtant l'objet pour cette raison.

Ivar Kreuger
(1880-1932)

vis de l'ensemble du marché, qui ne trouve plus ou presque de valeurs "refuges" alors même qu'elles existent, du point de vue des fondamentaux. Mais quelle est donc cette valeur fondamentale qui ramènerait les spéculateurs à la raison, permettant au mieux de simples corrections du marché mais au pire l'éclatement des bulles, synonyme de krachs ?

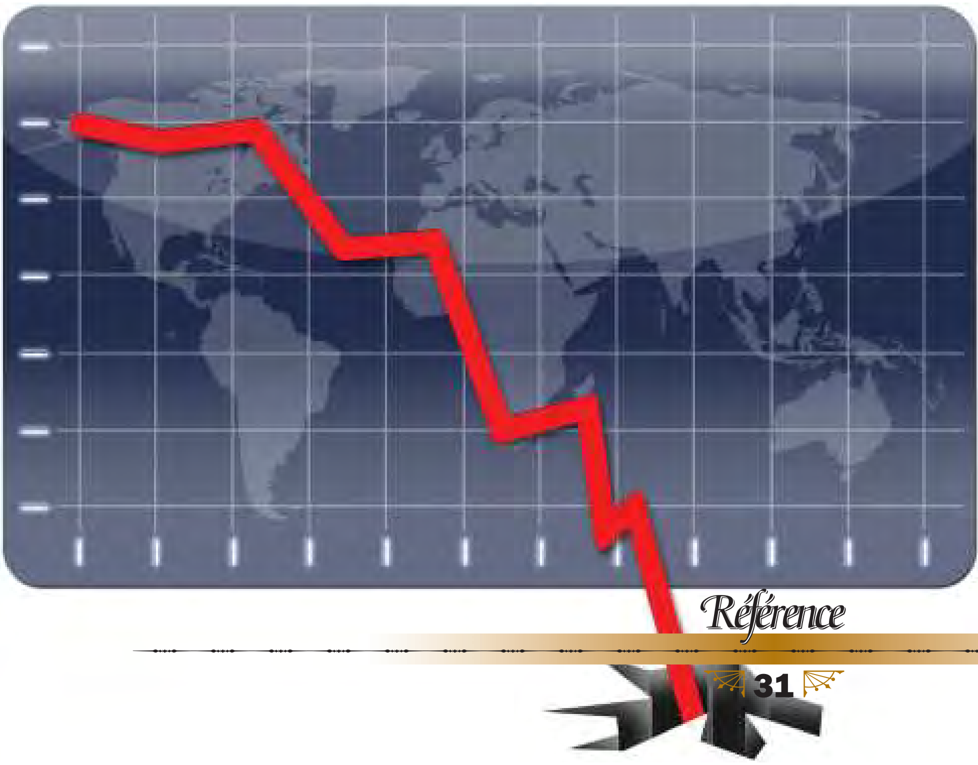
L'idée de Fama peut paraître excellente si on utilise sa définition pour réfléchir au sens du prix à un moment donné plutôt qu'à l'efficience au sens de révélateur de valeur intrinsèque. Il aurait donné une excellente définition d'un marché efficient au sens de "révélateur des déterminants comportementaux", mais pas au sens de "révélateur de valeur" : quand le prix "diverge" de ce que l'on considère comme la valeur fondamentale, c'est bien que les agents achètent en pensant qu'ils peuvent réaliser une plus-value. Ils agissent conformément à la définition de Kaldor de la spéculation, c'est-à-dire acheter un actif dans le seul but de le revendre à terme avec profit. Fama parle d'événements, dont on ne sait pas s'ils concernent la firme ou plus généralement le marché. Sa définition n'est pas mauvaise si l'on considère que les multiples biais possibles (conservatisme, optimisme, confiance...) n'empêchent en rien le prix de révéler le comportement des agents et **leurs** anticipations de revenus futurs plutôt que celles de la firme. En clair, les évolutions de prix, même si elles paraissent irrationnelles, révèlent bien des anticipations de revenus futurs si ce n'est que ceux-ci sont de plus en plus évalués indépendamment de l'activité disons "industrielle" de la firme, mais de plus en plus dépendante de l'activité "financière" du marché, lequel ne concerne pas seulement la firme considérée mais aussi une tendance générale, "les" entreprises cotées, "la" bourse comme on dit. De fait, les anticipations se détachent de plus en plus des revenus réalisés dans le passé pour se concentrer sur les revenus futurs. Or, si ces derniers ne dépendent pas, en théorie, des revenus passés (sauf pour les chartistes qui se contenteraient d'observer des cours sur le long terme de manière tout à fait indépendante de l'environnement industriel de la firme), ils dépendent étroitement des investissements présents, des perspectives du marché (au sens commercial et industriel) de la firme... La spéculation est alors en quelque sorte un "excès de considération de l'avenir". Le marché est alors efficient pour révéler les comportements, en aucun cas la juste évaluation présente d'un titre. Peut-être est-ce une erreur d'assimiler les deux.


DAGENS NYHETER.

Ivar Kreuger död

Nervöst sammanbrott, sköt sig i Paris.

Il semble ainsi que l'on doive accepter que l'économie de marché, dynamisée par des



Finance Nicole El Karoui, professeur à l'Ecole polytechnique, forme de jeunes financiers recrutés à prix d'or

« Les maths sont un maillon de la crise, mais pas décisif »

Mme El Karoui défend le rôle des mathématiciens dans la finance, accusés d'avoir inventé des produits trop sophistiqués aux risques mal évalués

Plus de 600 spécialistes internationaux des mathématiques financières se sont retrouvés, jeudi 27 et vendredi 28 mars, à la Chambre de commerce et d'industrie de Paris pour le premier Forum international de la recherche en finance du pôle de compétitivité Finance Innovation. Ils jugent que la crise financière, loin de remettre en cause leur discipline, leur ouvre de nouveaux champs d'études : sur la nécessité d'incorporer l'éventualité d'une crise de liquidités dans leurs modèles, par exemple.

Nicole El Karoui est professeur de mathématiques financières à l'Ecole polytechnique, fondatrice et coresponsable du Master 2 « Probabilités & Finance » de l'université Pierre-et-Marie-Curie et de l'Ecole polytechnique. Ses élèves sont recrutés à prix d'or dans les salles de marché du monde entier. Elle analyse le rôle des mathématiques dans la chute des marchés.

Les mathématiques ont été mises en cause dans la crise financière actuelle, dans la mesure où elles auraient permis de mettre sur le marché des produits très sophistiqués que les utilisateurs ne comprenaient pas. Qu'en pensez-vous ?

Les utilisateurs, dans les banques, comprennent ce qu'ils utilisent. Et la crise actuelle n'est pas une crise des mathématiques. Elles n'apparaissent qu'en bout de chaîne. Ce ne sont pas les mathématiciens qui ont eu l'idée de la titrisation, mais les financiers. Ceux-ci ont alors fait évaluer les risques des produits de titrisation par des agences de notation. Les maths ne sont intervenues qu'ensuite pour créer des produits dérivés permettant de se couvrir contre ces risques.

Apparemment, les maths ont failli puisque les risques n'ont pas été couverts.

Nos modèles sont faits pour fonctionner dans des situations ordinaires, pour des quantités raisonnables de produits vendus, dans un contexte d'activité standard pour couper des pertes de 3 % à 5 %. Pas pour des périodes de surchauffe, de bulle. Un système qui marche pour couvrir 50 millions ne marche pas pour 500. Car un modèle n'explique pas tout. Par définition, il fait des erreurs qui ne sont acceptables que si les montants en jeu sont faibles. Mais quand une voiture faite pour rouler à 120 à l'heure se met à rouler durablement à 180, des pannes surviennent, des pièces cassent, les garde-fous ne fonctionnent plus.

Les mathématiques donnent le sentiment que l'on peut mieux contrôler. Les mathématiciens auraient peut-être dû mieux préciser que leurs modèles étaient frustes. Ils n'ont peut-être pas assez signalé le risque que faisait porter un très petit pourcentage de produits très risqués dans des produits structurés. Dans ce sens, les mathématiques sont un maillon de la crise ; mais pas le maillon décisif.

Quel est donc, selon vous, le maillon décisif ?

La formation d'une bulle. Car les comportements ne sont alors plus rationnels. Tout le monde y va. Le bons sens disparaît. La vraie question est donc de savoir pourquoi on laisse des bulles se former. Quand on est à l'intérieur, il n'est pas facile d'en sortir, car on gagne beaucoup d'argent. Si on sort trop tôt, on est sanctionné. Les bénéfices des banques depuis deux ans auraient dû servir d'alerte. C'était le signe d'un emballement. On ne gagne pas beaucoup d'argent sans prendre de gros risques. On s'étonne maintenant de grandes pertes. Il aurait fallu être plus vigilant sur les gains. Tout le monde a laissé faire. La crise est due au manque de régulation. Les Etats-Unis ont laissé se former cette bulle qui soutenait leur économie. Je ne peux pas croire qu'on ne savait pas qu'outre-Atlantique il y avait beaucoup trop d'argent investi dans les subprimes. Ces produits permettaient aux institutions financières de booster leur activité, à une période où les taux étaient très bas.

Les agences de notation sont aussi en cause. On ne sait pas comment elles font leur rating.

Quel impact la crise a-t-elle sur votre discipline ?

Elle crée de la demande de mathématiques pour améliorer la gestion des risques ; il s'agit de mieux comprendre, de mieux analyser les risques des produits dérivés et des salles de marché ; de s'intéresser davantage à la taille des positions et de mettre en place davantage d'alertes.

Il faut aussi éduquer au risque et mieux informer sur les possibles erreurs des modèles. La crise nous oblige à analyser des phénomènes jamais vus. Car chaque krach est différent du précédent. ■

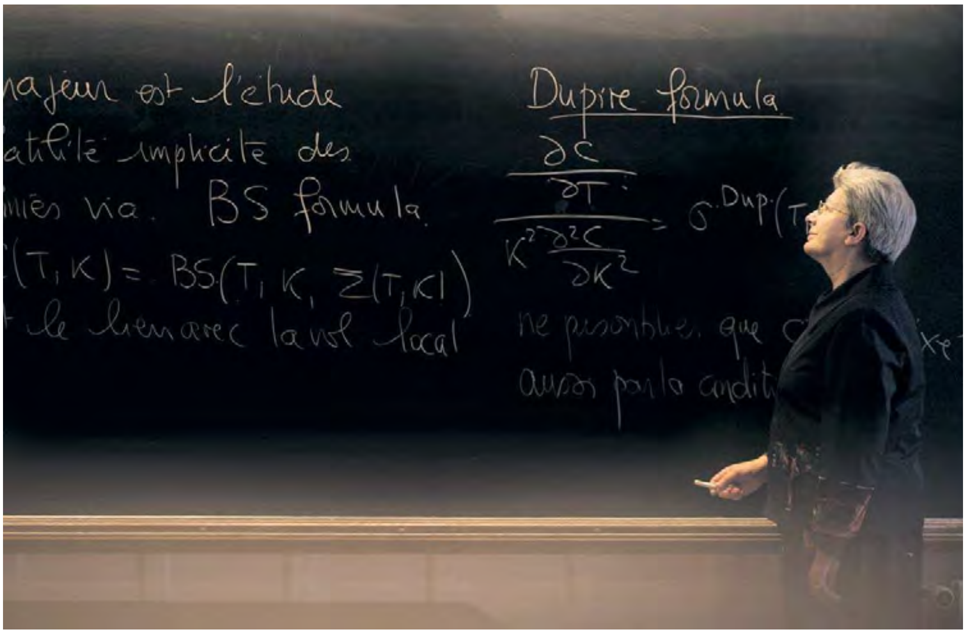
PROPOS RECUEILLIS PAR ANNIE KAHN

LEXIQUE

Subprime : crédit hypothécaire accordé aux Etats-Unis par des établissements spécialisés, non régulés, à des ménages modestes, sans considération de leur capacité à rembourser.

Titrisation : montage permettant à un établissement financier de transférer le risque de non-remboursement d'un crédit en le transformant en produit complexe vendu sur le marché.

Produit structuré : combinaison de produits financiers, destinée à protéger ou à garantir tout ou partie d'un capital, tout en offrant une espérance de rendement supérieure aux produits classiques.



Pour l'universitaire française, la crise actuelle est surtout due à un manque de régulation des marchés financiers. PASCAL PERICH POUR « LE MONDE »

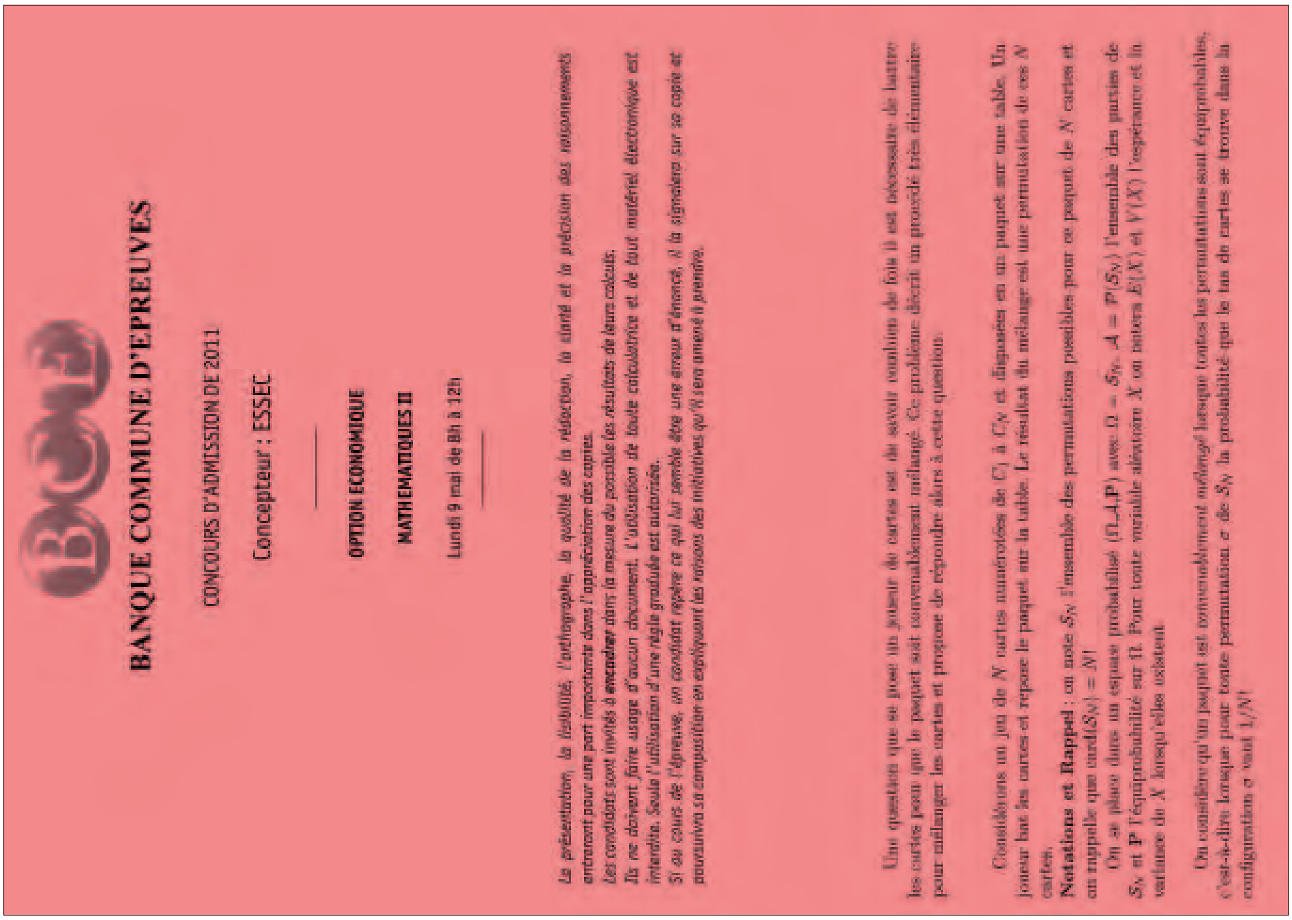
Extrait du "Monde" daté du 29 mars 2008

investissements qui sont par nature des "ponts jetés vers l'avenir" (Schumpeter, 1935), un avenir incertain, soit par nature fondée sur l'acceptation de risques : risque de signature, tenant aux emprunteurs eux-mêmes, risque de liquidité, tenant au principes mêmes des financements de long terme qui "transforment" les échéances d'emprunts de court terme de dépôts en prêts de long terme, et risque de marché, tenant au caractère inévitable des "surprises" qu'aucun modèle ne pourra sans doute jamais intégrer (le 11 septembre 2001 et ses conséquences apparaissent-ils dans les cours passés des titres des chartistes et dans les perspectives de profits futurs des fondamentalistes ?). Dans un interview au journal Le Monde (29 mars 2008), Nicole El Karoui, spécialiste de la formation de mathématiciens à la finance avoue sans ciller que les "modèles sont faits pour fonctionner dans des situations *ordinaires*, pour des quantités *raisonnables* de produits vendus, dans un contexte d'activité *standard*...". On ne peut s'empêcher de sourire. Les modèles ne seraient-ils donc valables que lorsqu'ils sont parfaitement inutiles et que tout le monde peut raisonnablement anticiper le marché sans en avoir vraiment besoin ?

D. C.

Corrigé de l'épreuve Maths II ESSEC 2011 voie E

Maxence Dehorter, Matthias Fegyveres, Adrien Rouget
Professeurs de mathématiques, Optimal Prépa (Paris) et IPESUP (Paris)
Auteurs de corrigés d'annales des concours des Grandes Écoles de commerce depuis 1998 (PUF, collection Major), en diffusion auprès d'Optimal Prépa



BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Concepteur : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 9 mai de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Une question que se pose un joueur de cartes est de savoir combien de fois il est nécessaire de battre les cartes pour que le paquet soit convenablement mélangé. Ce problème décrit un procédé très élémentaire pour mélanger les cartes et propose de répondre alors à cette question.

Considérons un jeu de N cartes numérotées de C_1 à C_N et disposées en un paquet sur une table. Un joueur bat les cartes et repose le paquet sur la table. Le résultat du mélange est une permutation de ces N cartes.

Notations et Rappel : on note $\mathcal{S}_N$ l'ensemble des permutations possibles pour ce paquet de N cartes et on rappelle que $\mathrm{card}(\mathcal{S}_N) = N!$

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec $\Omega = \mathcal{S}_N$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{S}_N)$ l'ensemble des parties de $\mathcal{S}_N$ et $\mathbf{P}$ l'équiprobabilité sur Ω. Pour toute variable aléatoire X on notera $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X lorsqu'elles existent.

On considère qu'un paquet est *convenablement mélangé* lorsque toutes les permutations sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_N$ la probabilité que le tas de cartes se trouve dans la configuration σ vaut $1/N!$

Vocabulaire et notations :
Une carte située au sommet de la pile est dite *en position n°1*, celle qui se trouve immédiatement en dessous est dite *en position n°2*, etc. Ainsi une carte située en position n°N désigne la carte située en bas de la pile. On prendra garde à bien distinguer la position d'une carte dans le paquet du numéro qu'elle porte.

Partons d'un tas de cartes rangées initialement dans l'ordre suivant :

pour tout i élément de $[\![1,N]\!]$, la carte C_i se trouve en position i.

Ainsi, à l'instant initial, la carte C_1 se trouve sur le dessus du paquet alors que C_N se trouve donc tout en dessous du paquet.

Pour k élément de $[\![1,N]\!]$, on appelle *insertion à la k-ième place* l'opération qui consiste à prendre la carte située au-dessus du paquet et à l'insérer entre la k-ième et la $(k+1)$-ième place. Une insertion à la première place ne change pas l'ordre des cartes. Une insertion à la N-ième place consiste à faire glisser la carte située au-dessus du paquet pour la mettre sous le paquet.

Le *battage par insertions* du jeu de cartes consiste à effectuer une suite d'insertions aléatoires, en choisissant, à chaque instant, au hasard uniformément dans $\{1,\cdots,N\}$ la place à laquelle l'insertion a lieu, indépendamment des insertions précédentes.
Les instants successifs d'insertions seront notés $1,2,\dots,n,\dots$, l'instant initial est $n=0$.

Notations. Nous notons :

- T_1 le premier instant où la carte située sur le dessus du paquet est glissée en dernière position, c'est-à-dire le premier instant où la carte C_N se trouve remontée de la position N à la position $N-1$,
- T_2 le premier instant où la carte C_N se trouve remontée en position $N-2$,
- et plus généralement, pour i dans $[\![1,N-1]\!]$, T_i le premier instant où la carte C_N atteint la position $N-i$.
- On posera également $\Delta_1 = T_1$ et $\forall i \in [\![2,N-1]\!]$, $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$.
- Enfin, on notera $T = T_{N-1}+1$.

On admet que les conditions de l'expérience permettent de faire l'hypothèse que les variables aléatoires $(\Delta_i)_{i\in[\![1,N-1]\!]}$ sont indépendantes.

Description d'un exemple. Dans le tableau ci-dessous, nous décrivons les résultats d'une expérience faite sur un paquet de $N=4$ cartes. La première ligne du tableau indique les instants n, la deuxième ligne indique les positions d'insertions, et dans la dernière ligne figure la configuration du paquet à l'instant n.

	instant n	0	1	2	3	4	5	6	7
	insertion en place k		3	2	4	1	3	4	2
Configuration du paquet	position 1	C_1	C_2	C_3	C_2	C_2	C_1	C_4	C_2
	position 2	C_2	C_3	C_2	C_1	C_1	C_4	C_2	C_4
	position 3	C_3	C_1	C_1	C_4	C_4	C_2	C_3	C_3
	position 4	C_4	C_4	C_4	C_3	C_3	C_3	C_1	C_1

Pour cette expérience, on a les résultats $T_1(\omega)=3$, $T_2(\omega)=5$ et $T_3(\omega)=6$ et $T(\omega)=7$.

Partie 1 - Description et premiers résultats

1) Justifier que $\forall i \in [\![2,N-1]\!]$ $T_i = \Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_i$.
Que représente l'intervalle de temps Δ_i ?
2) Loi de Δ_1.
Déterminer pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\Delta_1>n)$ et reconnaître la loi de Δ_1.
3) Soit $i\in[\![2,N-1]\!]$. Loi de Δ_i.
   (a) Établir que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}(\Delta_i>n)=\left(\frac{N-i}{N}\right)^n$. En déduire que Δ_i suit une loi usuelle que l'on précisera.
   (b) En déduire $E(\Delta_i)=\dfrac{N}{i}$ et $V(\Delta_i)=N\dfrac{N-i}{i^2}$
4) Loi de T_2. Soit $n\geq 2$.
   (a) Démontrer que $\mathbf{P}(T_2=n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}(\Delta_2=n-k)\mathbf{P}(\Delta_1=k)$.
   (b) Justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k = N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}-1\right]$
   (c) En déduire que l'on a : $\mathbf{P}(T_2=n)=\frac{2}{N}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\right]$
5) À l'instant T_2, la carte C_N est située en position $N-2$ et deux cartes se trouvent sous elle qui ont été insérées aux instants T_1 et T_2.
Que valent alors les probabilités, qu'à l'instant T_2 :
   (a) la carte insérée à l'instant T_1 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_2 en place N ?
   (b) la carte insérée à l'instant T_2 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_1 en place N ?
6) À l'instant T_3, la carte C_N est située en position $N-3$ et trois cartes, insérées aux instants T_1, T_2 et T_3, se trouvent sous elle. On note alors, pour $i\in\{1,2,3\}$, a_i la position de la carte ayant été insérée à l'instant T_i.
   (a) Combien y a-t-il de résultats possibles pour le triplet (a_1,a_2,a_3) ?
   (b) Quelques exemples. Donner les probabilités qu'à l'instant T_3 :
      i) on obtienne $(a_1,a_2,a_3)=(N-2,N-1,N)$?
      ii) on obtienne $(a_1,a_2,a_3)=(N-2,N,N-1)$?
7) Justifier la phrase suivante :
"À partir de l'instant T, toutes les configurations du jeu de cartes sont équiprobables."
On retiendra que si on arrête le battage des cartes par insertion exactement à l'instant T, on a un paquet convenablement mélangé. Cependant le temps T étant aléatoire, il n'est pas possible d'arrêter de battre les cartes à cet instant précis, à moins de marquer la carte C_N bien sûr !

Partie 2 - Estimation du nombre d'insertions pour bien mélanger les cartes

Notations : on introduit les suites $(H_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n\geq 1 \quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ et } u_n = H_n-\ln(n)$$

8) Espérance et variance de T
Justifier que $E(T)=NH_N$ et que $V(T)=N^2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\right)-NH_N$.
9) Étude de la suite (u_n)
   (a) Montrer que pour tout entier $k\geq 1$, on a $\dfrac{1}{k+1}\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leq\frac{1}{k}$.
   (b) En déduire successivement :
      i) la décroissance de la suite (u_n),
      ii) l'encadrement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(n+1)\leq H_n\leq\ln(n)+1$.
   (c) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente et que sa limite, notée γ appartient à $[0,1]$.
10) (a) Établir que $E(T)\underset{N\to+\infty}{\sim}N\ln(N)$ et $E(T)=N\ln(N)+N\gamma+o(N)$

(b) Quelle est la nature de la suite $\left(\frac{V(T)}{N^2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$? *(on prendra garde au fait que $V(T)$ dépend de N).*
Justifier qu'il existe une constante α, strictement positive, telle que

$$V(T) \underset{N\to\infty}{\sim} \alpha N^2 \text{ et } V(T) \leq \alpha N^2$$

11) Écart à la moyenne
On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebychev valable pour une variable aléatoire X admettant une espérance et une variance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Soit N fixé et une constante c strictement plus grande que 1.

(a) Justifier que $\forall\omega \in \Omega$, $|T(\omega) - N\ln(N)| \leq |T(\omega) - E(T)| + N$.
Comparer par une inclusion les événements suivants

$$\Big(|T - N\ln(N)| \geq cN\Big) \text{ et } \Big(|T - E(T)| \geq N(c-1)\Big)$$

(b) Démontrer que

$$\mathbf{P}\Big(|T - N\ln(N)| \geq cN\Big) \leq \frac{\alpha}{(c-1)^2}$$

où α a été définie à la question 10b.
Le nombre N étant fixé, que vaut $\lim\limits_{c\to+\infty} \mathbf{P}\Big(|T - N\ln N| \geq cN\Big)$?

12) Démontrer aussi que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\Big(|T - N\ln(N)| \geq \varepsilon N\ln(N)\Big) = 0$$

On peut traduire ces résultats en disant que l'événement : "T s'écarte de $N\ln(N)$ de manière significative" est un événement asymptotiquement rare.
Pour information, pour un paquet de 32 cartes, on donne $32\ln(32) \simeq 110$ et pour un paquet de 52 cartes, $52\ln(52) \simeq 205$.

13) Simulation informatique. Dans cette question on considère un jeu de $N = 32$ cartes.
Modélisation : On définit en PASCAL le `TYPE Paquet=ARRAY[1..32] OF INTEGER;` Le paquet de 32 cartes est représenté par une variable `Jeu` de `TYPE Paquet` rempli initialement d'entiers entre 1 et 32; donc, initialement, `Jeu[i]` contient i, c'est à dire que la carte C_i est en position i. Au cours des insertions, `Jeu[i]` désigne le numéro de la carte en position numéro i. Par exemple, `Jeu[i]=10` signifie que la carte C_{10} est en position i.
On indique à la fin de cette question un extrait de programme à compléter en suivant les questions suivantes :

(a) Écrire la procédure `Init` permettant de définir une variable `Jeu` correspondant à la configuration initiale du paquet de cartes.

(b) Compléter la procédure `Insertion` qui simule une opération d'insertion. On rappelle que la fonction `RANDOM(32)` permet de tirer un nombre entier au hasard dans l'intervalle $[\![0, 31]\!]$.

(c) Que fait la fonction `T`?

(d) Écrire le programme principal permettant de calculer et d'afficher la moyenne des valeurs prises par la fonction `T` sur 100 expériences et compléter la ligne de déclaration de variables.

Extrait du programme

```
PROGRAM ESSEC2011;
TYPE Paquet=ARRAY[1..32] OF INTEGER;
VAR Jeu :Paquet;
     ...............       (à compléter)

PROCEDURE Init( .............)


PROCEDURE Insertion(VAR Jeu :Paquet);
VAR i,k,cartedessus :INTEGER;
BEGIN
   k := .......    (position où on va insérer la carte du dessus)
   cartedessus :=Jeu[1];
   IF k>1 THEN FOR i :=1 TO k-1 DO Jeu[i] := ....
   Jeu[k] := ....;
END;

FUNCTION T(Jeu :Paquet) :INTEGER;
VAR n :INTEGER;
BEGIN
   Init(Jeu);
   n :=0;
   WHILE Jeu[1]<>32 DO
   BEGIN
      Insertion(Jeu);
      n :=n+1
   END;
   T :=n
END;

BEGIN  { programme principal }

END.
```

Partie 3 - Distance variationnelle à la loi uniforme

Notations

- On note π l'équiprobabilité sur S_N, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(S_N)$ dans $[0,1]$ telle que :

$$\forall A \subset S_N \quad \pi(A) = \frac{\text{card}(A)}{N!}; \text{ en particulier, } \forall\sigma \in S_N \quad \pi(\{\sigma\}) = \frac{1}{N!}$$

- On note également μ_n la probabilité sur S_N définie comme suit :
pour chaque configuration σ de S_N, $\mu_n(\{\sigma\})$ désigne la probabilité qu'à l'instant n le tas de cartes se trouve dans la configuration σ.
On a alors pour pour toute partie A de S_N, $\mu_n(A) = \sum_{\sigma\in A} \mu_n(\{\sigma\})$.

On peut mesurer la qualité du mélange à un instant donné n en estimant l'écart entre μ_n et π. Une distance d entre ces probabilités est définie de la manière suivante :

$$d(\mu_n, \pi) = \max\Big\{|\mu_n(A) - \pi(A)|,\ A \subset S_N\Big\}$$

14) Soient A une partie de $\mathcal{S}_N$, $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'événement : "à l'instant n le paquet de cartes se trouve dans une configuration qui appartient à la partie A."

(a) Expliquer, en utilisant la question 7, l'égalité suivante : $\mathbf{P}_{(T\leq n)}(E_n) = \pi(A)$.
En déduire $\mathbf{P}(E_n \cap (T \leq n)) = \pi(A)\mathbf{P}(T \leq n)$.

(b) Établir que $\mathbf{P}(E_n \cap (T > n)) \leq \mathbf{P}(T > n)$.

(c) Montrer que

$$\mu_n(A) \leq \pi(A) + \mathbf{P}(T > n)$$

15) Soit A une partie de $\mathcal{S}_N$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

(a) Exprimer $\mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A})$ en fonction de $\mu_n(A)$ et $\pi(A)$.

(b) Déduire des questions précédentes la majoration :

$$|\mu_n(A) - \pi(A)| \leq \mathbf{P}(T > n)$$

16) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d(\mu_n, \pi) \leq \mathbf{P}(T > n)$. Déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\mu_n, \pi)$

Partie 4- Une majoration de $\mathbf{P}(T > n)$

Dans cette partie, nous nous intéressons provisoirement à un collectionneur de timbres. Celui-ci reçoit chaque jour une lettre affranchie avec un timbre choisi au hasard uniformément parmi les N timbres en vigueur. On étudie ici le nombre de jours que doit attendre le collectionneur pour posséder la collection complète des N timbres. Le jour 0 il n'a aucun timbre.

On note alors :

- pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$, S_k le nombre aléatoire de jours que doit attendre le collectionneur pour que le nombre de timbres différents qu'il possède passe de $k-1$ à k,
- $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$, soit la variable aléatoire correspondant au nombre de jours à attendre pour posséder la collection complète des N timbres,
- en supposant les N timbres en vigueur numérotés de 1 à N, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, B_j^m l'événement "le jour m, le collectionneur n'a toujours pas reçu de lettre affranchie avec le timbre numéro j."

On admet que les variables aléatoires $(S_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$ sont indépendantes.

17) Déterminer la loi de S_1.

18) Déterminer pour tout entier $k \in [\![2, N]\!]$ la loi de la variable S_k.

19) En déduire que la variable S suit la même loi de probabilité que la variable T étudiée dans les parties précédentes.
Ce résultat sera utilisé pour estimer la quantité $\mathbf{P}(T > n)$.

20) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

(a) Exprimer l'événement $(S > m)$ à l'aide des événements $B_1^m, B_2^m, \ldots, B_N^m$.

(b) Que vaut $\mathbf{P}(B_j^m)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$?

(c) On rappelle que pour tout entier $n \geq 2$ et pour toute famille d'événements $A_1, \ldots, A_n$, on a l'inégalité : $\mathbf{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$. En déduire $\mathbf{P}(S > m) \leq N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m$.

21) (a) Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

(b) Déduire des résultats précédents la majoration

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T > m) \leq N e^{-\frac{m}{N}}$$

22) On reprend les notations introduites dans la partie précédente.

(a) Soit $c > 0$ fixé. Montrer que pour n entier supérieur ou égal à $N \ln N + cN$ on a : $d(\mu_n, \pi) \leq e^{-c}$.

(b) *Application numérique.* On estime qu'une distance en variation à la loi uniforme de 0,2 est acceptable.
Avec un jeu de 32 cartes, combien de battages par insertions doit-on faire pour considérer le paquet mélangé de façon acceptable?

1

► Comme, pour tout $j \in [\![2, N-1]\!]$, $\Delta_j = T_j - T_{j-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![2, N-1]\!], \sum_{j=2}^{i} \Delta_j &= \sum_{j=2}^{i} (T_j - T_{j-1}) && \text{les termes s'éliminant deux à deux :} \\ &= T_i - T_1 && \text{et comme } T_1 = \Delta_1 \text{ :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2, N-1]\!], T_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta_j}$$

► Comme, pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, T_i est le temps d'attente du premier instant où la carte C_N remonte à la place $N - i$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![2, N-1]\!], \Delta_i \text{ est le temps d'attente entre le premier instant où la carte } C_N \text{ se situe en position } N-i+1 \text{ et le premier instant où elle se situe en position } N-i}$$

2

► Si la carte C_N est à la $N^{ème}$ place à l'instant $j \in \mathbb{N}$, elle se situe à la $(N-1)^{ème}$ place à l'instant $j+1$ si et seulement si la carte située au-dessus du paquet est insérée après la $N^{ème}$ place à l'instant $j+1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, soit $I_{k,i}$ l'événement : "la $k^{ème}$ insertion est effectuée après la $i^{ème}$ place". On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, P([\Delta_1 > n]) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{I_{k,N}}\right) && \text{et comme } \overline{I_{1,N}}, \ldots, \overline{I_{n,N}} \text{ sont mutuellement indépendants :} \\ &= \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{I_{k,N}}\right) && \text{et comme les insertions sont faites au hasard et uniformément dans } [\![1, N]\!] \text{ :} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{N}\right) && \text{soit :} \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

Le cas $n = 0$ rentrant dans le cas général (car $P([\Delta_1 > 0]) = 1$), on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P([\Delta_1 > n]) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n}$$

► Comme $\Delta_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[\Delta_1 = n] = [\Delta_1 > n-1] \setminus [\Delta_1 > n]$ et comme $[\Delta_1 > n] \subset [\Delta_1 > n-1]$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, P([\Delta_1 = n]) &= \mathrm{P}([\Delta_1 > n-1]) - P([\Delta_1 > n]) && \text{et d'après le résultat précédent :} \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n && \text{soit :} \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Comme $\Delta_1(\Omega)=\mathbb{N}^*$, on peut conclure :

$$\boxed{\Delta_1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{N}}$$

3

a) ► Si la carte C_N est à la $(N-i+1)^{ème}$ place à l'instant $j\in\mathbb{N}^*$, elle se situe à la $(N-i)^{ème}$ place à l'instant $j+1$ si et seulement si la carte située au-dessus du paquet est insérée après la $(N-i+1)^{ème}$ place à l'instant $j+1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*, P\left([\Delta_i>n]\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{I_{k,N-i+1}}\right) && \text{et comme } \overline{I_{1,N-i+1}},...,\overline{I_{n,N-i+1}} \text{ sont mutuellement indépendants :}\\
&= \prod_{k=1}^{n}P\left(\overline{I_{k,N-i+1}}\right) && \text{et comme les insertions sont faites au hasard et uniformément dans } [\![1,N]\!] :\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{N-i}{N}\right) && \text{soit :}\\
&= \left(\frac{N-i}{N}\right)^n.
\end{aligned}$$

Le cas $n=0$ rentrant dans le cas général (car $P\left([\Delta_i>0]\right)=1$), on peut conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, P\left([\Delta_i>n]\right)=\left(\frac{N-i}{N}\right)^n}$$

► Comme $\Delta_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $[\Delta_i=n]=[\Delta_i>n-1]\setminus[\Delta_i>n]$ et comme $[\Delta_i>n]\subset[\Delta_i>n-1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*, P\left([\Delta_i=n]\right) &= \mathrm{P}([\Delta_i>n-1])-P\left([\Delta_i>n]\right) && \text{et d'après le résultat précédent :}\\
&= \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-1}-\left(\frac{N-i}{N}\right)^{n} && \text{soit :}\\
&= \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-1}\frac{i}{N}.
\end{aligned}$$

Comme $\Delta_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$, on peut conclure :

$$\boxed{\Delta_i \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{i}{N}}$$

b) Comme $\Delta_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{i}{N}\right)$, $E\left(\Delta_i\right)=\frac{N}{i}$ et $V\left(\Delta_i\right)=\frac{N-i}{N}\left(\frac{N}{i}\right)^2$, et on peut conclure :

$$\boxed{E\left(\Delta_i\right)=\frac{N}{i} \text{ et } V\left(\Delta_i\right)=N\frac{N-i}{i^2}}$$

4

a) Comme $T_2=\Delta_1+\Delta_2$ et comme $\Delta_1(\Omega)=\Delta_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et Δ_1 et Δ_2 sont indépendantes, $T_2(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$ et on a :

$$\begin{aligned}
P\left([T_2=n]\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}P\left([\Delta_1=k]\cap[\Delta_2=n-k]\right) && \text{et comme } [\Delta_2=n-k]=\emptyset \text{ si } k\geqslant n \text{ (car } \Delta_2(\Omega)=\mathbb{N}^*) :\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}P\left([\Delta_1=k]\cap[\Delta_2=n-k]\right) && \text{et comme } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ sont indépendantes :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P\left([T_2=n]\right)=\sum_{k=1}^{n-1}P\left([\Delta_2=n-k]\right)P\left([\Delta_1=k]\right)}$$

b) Comme $1-\frac{2}{N}\neq 1-\frac{1}{N}$, $\dfrac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\neq 1$. En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^k &= \frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\times\frac{1-\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1}}{1-\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}} && \text{soit :}\\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)\times\frac{1-\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{N}-1+\frac{1}{N}} && \text{et donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^k=N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1}-1\right]}$$

c) D'après les résultats des questions 4.a, 2. et 3.a (pour $i=2$), on a :

$$\begin{aligned}
P\left([T_2=n]\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-k-1}\frac{2}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N} && \text{soit :}\\
&= \frac{2}{N^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{N}}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^k && \text{et d'après le résultat précédent :}\\
&= \frac{2}{N^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{N}}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1}-1\right] && \text{et donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P\left([T_2=n]\right)=\frac{2}{N}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\right]}$$

5

a) Soit A l'événement : "A l'instant T_2, la carte insérée à l'instant T_1 est en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_2 est en place N". Pour réaliser A, il faut et il suffit de :
- insérer une carte en position N à l'instant T_1 (avec une probabilité 1 car à l'instant T_1, la carte C_N remonte en place $N-1$),

- insérer une carte en position N à l'instant T_2 (avec une probabilité $\frac{1}{2}$ car à l'instant T_2, la carte C_N remonte en place $N-2$, donc la carte insérée ne peut l'être qu'aux places N ou $N-1$).
Les insertions étant indépendantes, on en déduit :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{2}}$$

b) Soit B l'événement : "A l'instant T_2, la carte insérée à l'instant T_1 est en place N et celle insérée à l'instant T_2 est en place N-1". Pour réaliser B, il faut et il suffit de :
- insérer une carte en position N à l'instant T_1 (avec une probabilité 1 car à l'instant T_1, la carte C_N remonte en place $N-1$),
- insérer une carte en position $N-1$ à l'instant T_2 (avec une probabilité $\frac{1}{2}$ car à l'instant T_2, la carte C_N remonte en place $N-2$, donc la carte insérée ne peut l'être qu'aux places N ou $N-1$).
Les insertions étant indépendantes, on en déduit :

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{2}}$$

6

a) Comme les cartes insérées dans l'ensemble des instants $\{T_1, T_2, T_3\}$ occupent nécessairement les places de l'ensemble $\{N, N-1, N-2\}$ et comme ces trois cartes occupent des emplacements distincts, il y a autant de triplets (a_1, a_2, a_3) que de bijections de l'ensemble des trois cartes insérées aux instants T_1, T_2 et T_3 sur l'ensemble $\{N-2, N-1, N\}$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Il y a } 3! = 6 \text{ triplets } (a_1, a_2, a_3) \text{ possibles}}$$

b) i. Soit A_1 l'événement : "A l'instant T_3, $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N-1, N)$". Pour réaliser A_1, il faut et il suffit de :
- insérer une carte en position N à l'instant T_1 (avec une probabilité 1 car à l'instant T_1, la carte C_N remonte en place $N-1$),
- insérer une carte en position N à l'instant T_2 (avec une probabilité $\frac{1}{2}$ car à l'instant T_2, la carte C_N remonte en place $N-2$, donc la carte insérée ne peut l'être qu'aux places N ou $N-1$),
- insérer une carte en position N à l'instant T_3 (avec une probabilité $\frac{1}{3}$ car à l'instant T_3, la carte C_N remonte en place $N-3$, donc la carte insérée ne peut l'être qu'aux places N, $N-1$ ou $N-2$).
Les insertions étant indépendantes, on en déduit :

$$\boxed{P(A_1) = \frac{1}{6}}$$

ii. Soit A_2 l'événement : "A l'instant T_3, $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N, N-1)$". Pour réaliser A_2, il faut et il suffit de :
- insérer une carte en position N à l'instant T_1 (avec une probabilité 1 car à l'instant T_1, la carte C_N remonte en place $N-1$),
- insérer une carte en position N à l'instant T_2 (avec une probabilité $\frac{1}{2}$ car à l'instant T_2, la carte C_N remonte en place $N-2$, donc la carte insérée ne peut l'être qu'aux places N ou $N-1$),
- insérer une carte en position $N-1$ à l'instant T_3 (avec une probabilité $\frac{1}{3}$ car à l'instant T_3, la carte C_N remonte en place $N-3$, donc la carte insérée ne peut l'être qu'aux places N, $N-1$ ou $N-2$).
Les insertions étant indépendantes, on en déduit :

$$\boxed{P(A_2) = \frac{1}{6}}$$

7

▷ Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, à l'instant T_n, les cartes insérées aux instants $T_1, ..., T_n$ se situent dans l'ensemble des positions $N, N-1, ..., N-n+1$. Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, soit a_n la position de la carte insérée à l'instant T_n et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{N, N-1, ..., N-n+1\}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in [\![2, N-1]\!]$, la proposition $\mathcal{P}_n$: "$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, P\left([(a_1, a_2, ..., a_n) = \sigma]\right) = \frac{1}{n!}$" est vraie.

• D'après les résultats de la question 5., $\mathcal{P}_2$ est vraie.

• Soit $n \in [\![2, N-2]\!]$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ avec $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n+1})$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Pour réaliser $[(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) = \sigma]$, il faut et il suffit de :
- définir $(a_1, a_2, ..., a_n)$ avec une probabilité $\frac{1}{n!}$ en posant : $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } \sigma_i > \sigma_{n+1} \\ \sigma_i - 1 & \text{si } \sigma_i < \sigma_{n+1} \end{cases}$,
- insérer une carte en position σ_{n+1} à l'instant T_{n+1} (avec une probabilité $\frac{1}{n+1}$ car à l'instant T_{n+1}, la carte C_N remonte en place $N-n-1$, donc la carte insérée ne peut l'être qu'aux places N, $N-1$ ... $N-n$).

Les insertions étant indépendantes, on a : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}, P\left([(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) = \sigma]\right) = \frac{1}{(n+1)!}$. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• On peut donc conclure que pour tout $n \in [\![2, N-1]\!], \mathcal{P}_n$ est vraie, en particulier pour $n = N-1$.

▷ Soient alors b la carte insérée à l'instant T_{N-1}+1 et $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ avec $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N)$. Soit $A = [(a, a_2, ..., a_{N-1}, b) = \sigma]$. Pour réaliser A, il faut et il suffit de :
- définir $(a_1, a_2, ..., a_{N-1})$ avec une probabilité $\frac{1}{(N-1)!}$ (d'après le résultat précédent) en posant :
$\forall i \in [\![1, N-1]\!], a_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } \sigma_i > b \\ \sigma_i - 1 & \text{si } \sigma_i < b \end{cases}$,
- insérer une carte à l'instant $T_{N-1}+1$ en position b à l'instant avec une probabilité $\frac{1}{N}$.

Les insertions étant indépendantes, $P(A) = \frac{1}{N!}$ et on peut conclure :[1]

$$\boxed{\text{A l'instant } T\text{, toutes les configurations du jeu de cartes sont équiprobables}}$$

8

► D'après le résultat de la question 1., $T = \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_k + 1$. Comme $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{N-1}$ admettent une espérance, T admet une espérance et par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(T) &= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} E(\Delta_k) && \text{et d'après le résultat de la question 3.b :} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N}{k} && \text{et en regroupant le terme en } k = N \text{ (égal à 1) dans la somme :} \\ &= N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} && \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(T) = NH_n}$$

[1] Peut-être pouvait-on donner une explication en français, moins rigoureuse mais plus rapide.

► De même, comme $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{N-1}$ admettent une variance, T admet une variance et comme $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{N-1}$ sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(T) &= \sum_{k=1}^{N-1} V(\Delta_k) && \text{et d'après le résultat de la question 3.b :} \\ &= N\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-k}{k^2} && \text{le terme en } k=n \text{ étant nul :} \\ &= N^2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} && \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(T) = N^2\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\right) - NH_n}$$

9

a) Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ soit par croissance de l'intégration ($k \leqslant k+1$ et les fonctions sont continues sur $[k, k+1]$) :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$ et par linéarité de l'intégration et comme $\int_k^{k+1} dt = 1$:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$$

b) i. D'après le résultat précédent, on a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leqslant [\ln(t)]_k^{k+1} \leqslant \frac{1}{k}$ soit :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) && \text{soit :} \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) && \text{d'où :} \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

ii. D'après le résultat de la question 9.a, en sommant de 1 à $n-1$ l'inégalité de gauche et de 1 à n l'inégalité de droite, on a :

$\forall n \geqslant 2, \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \\ \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{cases}$ les termes s'éliminant deux à deux et en posant $k' = k+1$ dans la première somme :

$\forall n \geqslant 2, \begin{cases} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \\ \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{cases}$ soit :

$\forall n \geqslant 2, \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

Le cas $n = 1$ rentrant dans le cas général (car $\ln(2) \leqslant 1$), on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1}$$

c) D'après le résultat précédent et par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1$ et comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée (par 0). Comme elle est décroissante (d'après le résultat de la question 9.(b)i.), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite γ et par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on peut conclure :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \gamma \text{ et } \gamma \in [0, 1]}$$

10

a) ► Pour tout $N \geqslant 2, \ln(N) > 0$ et on a :

$\forall N \geqslant 2, \frac{H_N}{\ln(N)} = \frac{u_N}{\ln(N)} + 1$ et comme $\lim_{N\to+\infty} \frac{u_N}{\ln(N)} = 0$ (car $\lim_{N\to+\infty} u_N = \gamma$ et $\lim_{N\to+\infty} \ln(N) = +\infty$) :

$\lim_{N\to+\infty} \frac{H_N}{\ln(N)} = 1$ soit :

$H_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$ et d'après le résultat de la question 8. :

$$\boxed{E(T) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\ln(N)}$$

► D'après le résultat de la question 8., $E(T) - N\ln(N) = N(H_N - \ln(N))$ et pour tout $N \geqslant 2, \ln(N) > 0$, donc on a :

$\forall N \geqslant 2, \frac{E(T) - N\ln(N) - N\gamma}{N} = u_N - \gamma$ et d'après le résultat de la question 9.c :

$\lim_{N\to+\infty} \frac{E(T) - N\ln(N) - N\gamma}{N} = 0$ soit :

$E(T) - N\ln(N) - N\gamma = \circ(N)$ et donc :

$$\boxed{E(T) = N\ln(N) + N\gamma + \circ(N)}$$

b) ► D'après le résultat de la question 8., on a :

$\frac{V(T)}{N^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - \frac{H_N}{N}$.

Or, d'après le raisonnement de la question 10.a, $H_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$ et par croissances comparées,

$\lim_{N\to+\infty} \frac{\ln(N)}{N} = 0$, donc $\lim_{N\to+\infty} \frac{H_N}{N} = 0$. De plus, la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge donc on peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{V(T)}{N^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et : } \lim_{N\to+\infty} \frac{V(T)}{N^2} = \alpha \text{ avec } \alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}$$

▶ D'après le résultat précédent, comme $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, on en déduit :

$$\boxed{\alpha > 0 \text{ et : } V(T) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha N^2}$$

▶ Comme $V(T) = N^2\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\right) - NH_N$ et comme $H_N > 0$, on a :

$V(T) \leqslant N^2\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\right)$ et comme $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$:

$$\boxed{V(T) \leqslant \alpha N^2}$$

11

a) ▶ Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$|T(\omega) - N\ln(N)| = |T(\omega) - E(T) + E(T) - N\ln(N)|$ et d'après l'inégalité triangulaire :

$\leqslant |T(\omega) - E(T)| + |E(T) - N\ln(N)|$.

Or, d'après les résultats des questions 9.(b)ii. et 8., on a :

$N\ln(N+1) \leqslant E(T) \leqslant N\ln(N) + N$ soit :

$N\big(\ln(N+1) - \ln(N)\big) \leqslant E(T) - N\ln(N) \leqslant N$ et comme $N\big(\ln(N+1) - \ln(N)\big) \geqslant 0$:

$|E(T) - N\ln(N)| \leqslant N$ et donc :

$$\boxed{\forall\omega \in \Omega, |T(\omega) - N\ln(N)| \leqslant |T(\omega) - E(T)| + N}$$

▶ Soit $\omega \in [|T - N\ln(N) \geqslant cN|]$. Comme $|T(\omega) - N\ln(N)| \geqslant cN$, d'après le résultat précédent, on a :

$|T(\omega) - E(T)| + N \geqslant cN$ d'où :

$|T(\omega) - E(T)| \geqslant (c-1)N$ soit :

$\omega \in [|T - E(T)| \geqslant (c-1)N]$ et donc :

$$\boxed{[|T - N\ln(N)| \geqslant cN] \subset [|T - E(T)| \geqslant N(c-1)]}$$

b) ▶ D'après le résultat précédent, on a alors :

$P([|T - N\ln(N)| \geqslant cN]) \leqslant P([|T - E(T)| \geqslant N(c-1)])$ et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (car $N(c-1) > 0$) :

$\leqslant \frac{V(T)}{(N(c-1))^2}$ et d'après le résultat de la question 10.b :

$$\boxed{P([|T - N\ln(N)| \geqslant cN]) \leqslant \frac{\alpha}{(c-1)^2}}$$

▶ D'après le résultat précédent, on a :
$\forall c > 1, 0 \leqslant P([|T - N\ln(N)| \geqslant cN]) \leqslant \frac{\alpha}{(c-1)^2}$.

Comme $\lim_{c\to+\infty} \frac{\alpha}{(c-1)^2} = 0$, d'après le théorème de l'encadrement, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{c\to+\infty} P([|T - N\ln(N)| \geqslant cN]) = 0}$$

12

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{N\to+\infty} \varepsilon\ln(N) = +\infty$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall N \geqslant N_0, \varepsilon\ln(N) > 1$. D'après le résultat de la question 11.b pour $N \geqslant N_0$ et $c = \varepsilon\ln(N)$, on a :
$0 \leqslant P([|T - N\ln(N)| \geqslant \varepsilon N\ln(N)]) \leqslant \frac{\alpha}{(\varepsilon\ln(N)-1)^2}$.

Comme $\lim_{N\to+\infty} \frac{\alpha}{(\varepsilon\ln(N)-1)^2} = 0$, d'après le théorème de l'encadrement, on peut conclure :

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0, \lim_{N\to+\infty} P([|T - N\ln(N)| \geqslant \varepsilon N\ln(N)]) = 0}$$

13

a)
```
Procedure init(var Jeu : paquet);
Var i : integer;
Begin
For i:=1 to 32 do Jeu[i]:=i
End;
```

b)
```
Procedure Insertion(var Jeu : paquet);
Var i,k,cartedessus : integer;
Begin
k:=random(32)+1;
cartedessus:=Jeu[1];
If k>1 then for i:=1 to k-1 do Jeu[i]:=Jeu[i+1];
Jeu[k]:=cartedessus
End;
```

c) Tant que la dernière carte du paquet initial (notée $C_{32} = 32$) n'est pas la carte du dessus du paquet, on effectue une nouvelle insertion de la carte située au dessus du paquet et on incremente `n` de 1. Ainsi la fonction `T` simule la variable aléatoire T_{N-1} de la partie I, donc la fonction procède à des insertions jusqu'à ce que la carte C_N se retouve en première position et stocke dans `T` le numéro de l'insertion à laquelle la carte C_N se retouve en première position.

d)
```
Var Jeu:Paquet;
k,S:integer;
Begin
For k:=1 to 100 do S:=S+T(Jeu);
writeln('La moyenne est',S/100)
End.
```

14

a) ▶ [2]Supposons $P([T \leqslant n]) \neq 0$. Sachant que $[T \leqslant n]$ est réalisé, d'après le résultat de la question 7., toutes les configurations sont équiprobables, donc on a :

2. Il faut supposer que $P([T \leqslant n]) \neq 0$ pour que la probabilité conditionnelle $P_{[T\leqslant n]}$ ait un sens.

$P_{[T\leqslant n]}(E_n) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ et par définition de π :

$$\boxed{P_{[T\leqslant n]}(E_n) = \pi(A)}$$

► Deux cas se présentent :

◇ Si $P([T \leqslant n]) = 0$, comme $E \cap [T \leqslant n] \subset [T \leqslant n]$, $0 \leqslant P([E_n \cap [T \leqslant n]]) \leqslant 0$.
On a donc : $P([E_n \cap [T \leqslant n]]) = 0 = \pi(A)P([T \leqslant n])$.

◇ Si $P([T \leqslant n]) \neq 0$, d'après le résultat précédent, on a par définition :

$\dfrac{P(E_n \cap [T \leqslant n])}{P([T \leqslant n])} = \pi(A)$ soit :

$P([E_n \cap [T \leqslant n]]) = \pi(A)P([T \leqslant n])$.

Dans tous les cas [3] on peut conclure :

$$\boxed{P([E_n \cap [T \leqslant n]]) = \pi(A)P([T \leqslant n])}$$

b) Comme $E_n \cap [T > n] \subset [T > n]$, on a :

$$\boxed{P(E_n \cap [T > n]) \leqslant P([T > n])}$$

c) Comme $[T \leqslant n] \cup [T > n] = \Omega$, on a :

$P(E_n) = P\big((E_n \cap [T \leqslant n]) \cup (E_n \cap [T > n])\big)$ et comme $[T \leqslant n] \cap [T > n] = \varnothing$:

$P(E_n) = P(E_n \cap [T \leqslant n]) + P(E_n \cap [T > n])$ et d'après les résultats des questions 14.a et 14.b :

$\mu_n(A) \leqslant \pi(A)P([T \leqslant n]) + P([T > n])$ et comme $P([T \leqslant n]) \leqslant 1$ et $\pi(A) \geqslant 0$:

$$\boxed{\mu_n(A) \leqslant \pi(A) + P([T > n])}$$

15

a) Comme μ_n et π sont deux probabilités, on a :

$\mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A}) = 1 - \mu_n(A) - 1 + \pi(A)$ et donc :

$$\boxed{\mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A}) = \pi(A) - \mu_n(A)}$$

b) En substituant $\overline{A}$ à A dans le résultat de la question 14.c, on a :

$-P([T > n]) \leqslant \pi(\overline{A}) - \mu_n(\overline{A})$ et d'après le résultat précédent :

$-P([T > n]) \leqslant \mu_n(A) - \pi(A)$ et d'après le résultat de la question 14.c :

$-P([T > n]) \leqslant \mu_n(A) - \pi(A) \leqslant P([T > n])$ et donc :

$$\boxed{|\mu_n(A) - \pi(A)| \leqslant P([T > n])}$$

3. Il fallait envisager deux cas pour être tout à fait rigoureux, même si *a priori* l'énoncé ne le demandait pas.

16

► Soit $A_0 \subset \mathcal{S}_N$ tel que $d(\mu_n, \pi) = |\mu_n(A_0) - \pi(A_0)|$. En substituant A_0 à A dans l'inégalité précédente, on a :

$0 \leqslant |\mu_n(A_0) - \pi(A_0)| \leqslant P([T > n])$ et donc :

$$\boxed{0 \leqslant d(\mu_n, \pi) \leqslant P([T > n])}$$

► On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P([T > n]) = 1 - P([T \leqslant n])$. Comme la fonction $x \mapsto P([T \leqslant x])$ est la fonction de répartition de T, $\lim\limits_{n\to+\infty} P([T \leqslant n]) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P([T > n]) = 0$ et d'après le théorème de l'encadrement, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d(\mu_n, \pi) = 0}$$

17

Comme S_1 est la variable aléatoire égale au nombre de jours nécessaires pour que le collectionneur ait un timbre, S_1 est la variable constante égale à 1, et on peut conclure :

$$\boxed{S_1(\Omega) = 1 \text{ et } P([S_1 = 1]) = 1}$$

18

Pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, S_k est la variable aléatoire égale au temps d'attente du premier succès ("Obtenir un nouveau timbre") dans une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $\dfrac{N-k+1}{N}$. Ainsi, pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, S_k suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-k+1}{N}$ et on peut conclure :

$$\boxed{\forall k \in [\![2, N]\!], S_k(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et : } \forall j \in \mathbb{N}^*, P([S_k = j]) = \left(\frac{k-1}{N}\right)^{j-1} \frac{N-k+1}{N}}$$

19

Comme $S_1 = 1$, et en posant $k' = N - k + 1$, $S = 1 + \sum\limits_{k=1}^{N-1} S_{N-k+1}$. Or, d'après le résultat précédent, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, S_{N-k+1} suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{k}{N}$. Ainsi, d'après le résultat de la question 3.a, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, S_{N-k+1} et Δ_k suivent la même loi. Comme $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{N-1}$ sont indépendantes et $S_N, S_{N-1}, ..., S_2$ sont indépendantes, $1 + \sum\limits_{k=1}^{N-1} S_{N-k+1}$ et $1 + \sum\limits_{k=1}^{N-1} \Delta_k$ suivent la même loi et on peut conclure :

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } S \text{ et } T \text{ suivent la même loi}}$$

20

a) L'événement $[S > m]$ est réalisé si et seulement si le collectionneur n'a pas encore obtenu au moins un des N timbres à l'instant m, donc on peut conclure :

$$\boxed{[S > m] = \bigcup_{j=1}^{N} B_j^m}$$

b) Pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, B_j^m est réalisé si et seulement si le collectionneur reçoit un des timbres de l'ensemble $[\![1, N]\!] \setminus \{j\}$ à chacun des m premiers jours, soit $(N-1)^m$ possibilités. Par équiprobabilité, on peut donc conclure :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, N]\!], P(B_j^m) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^m}$$

c) D'après le résultat de la question 20.a, on a :

$$\begin{aligned}
P([S>m]) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j^m\right) && \text{et d'après le résultat admis [4] :}\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} P\left(B_j^m\right) && \text{et d'après le résultat précédent :}\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^m && \text{la somme comportant } N \text{ termes égaux à } \left(1-\frac{1}{N}\right)^m :
\end{aligned}$$

$$\boxed{P([S>m]) \leqslant N\left(1-\frac{1}{N}\right)^m}$$

21

a) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^2 sur $]-1,+\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]-1,+\infty[, f'(x) = \frac{1}{x+1} && \text{d'où :}\\
&\forall x \in]-1,+\infty[, f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} && \text{et donc :}\\
&\forall x \in]-1,+\infty[, f''(x) < 0.
\end{aligned}$$

Ainsi f est concave sur $]-1,+\infty[$ et sa courbe représentative se situe au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$.[5] On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x}$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question 19., S et T suivent la même loi, donc d'après le résultat de la question 20.c, on a :

$$\begin{aligned}
P([T>m]) &\leqslant N\left(1-\frac{1}{N}\right)^m && \text{et comme } 1-\frac{1}{N} > 0 :\\
&\leqslant N\exp\left(m\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de la question 21.a pour $x = -\frac{1}{N}$ $(x > -1)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1-\frac{1}{N}\right) \leqslant -\frac{1}{N} && \text{et comme } m \geqslant 0 :\\
&m\ln\left(1-\frac{1}{N}\right) \leqslant -\frac{m}{N} && \text{et comme la fonction exp est croissante sur } \mathbb{R} :\\
&\exp\left(m\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\right) \leqslant e^{-\frac{m}{N}} && \text{et comme } N > 0 :
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, P([T>m]) \leqslant Ne^{-\frac{m}{N}}}$$

22

a) Soit $n \geqslant N\ln(N) + cN$. D'après les résultats des questions 21.b et 16., on a :

$$\begin{aligned}
d(\mu_n,\pi) &\leqslant Ne^{-\frac{n}{N}} && \text{et comme } n \geqslant N\ln(N)+cN \text{ et } y \mapsto e^{-y} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R} :\\
&\leqslant Ne^{-ln(N)-c} && \text{et donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant N\ln(N) + cN, d(\mu_n,\pi) \leqslant e^{-c}}$$

b) Comme : $\forall n \geqslant N\ln(N)+cN, d(\mu_n,\pi) \leqslant e^{-c}$, on peut considérer que le paquet est mélangé de façon acceptable si $e^{-c} \leqslant 0,2$, soit $c \geqslant \ln(5)$. Ainsi on doit choisir $n \geqslant 32\ln(32) + 32\ln(5)$. Comme $32\ln(32)+32\ln(5) \simeq 162,4$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{On doit faire au moins 163 battages par insertions pour considérer le paquet mélangé de façon acceptable}}$$

4. Ce résultat se montre par récurrence.
5. On pouvait également étudier le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$

Corrigé de l'épreuve Maths EDHEC 2011 voie S

Maxence Dehorter, Matthias Fegyveres, Adrien Rouget
Professeurs de mathématiques, Optimal Prépa (Paris) et IPESUP (Paris)
Auteurs de corrigés d'annales des concours des Grandes Écoles de commerce depuis 1998 (PUF, collection Major), en diffusion auprès d'Optimal Prépa

BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique
Vendredi 6 mai 2011

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$) et u un endomorphisme de E. On note Id l'identité de E.
Si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant : $P(u) = a_0I + a_1u + \dots + a_pu^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = Id$ par convention) .

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

1. Montrer que l'image de $(u - Id)$ est contenue dans $\text{Ker}(Q_1(u))$
2. On note $E_1 = Ker(u - Id)$.
   (a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1).x$.
   (b) En déduire que $E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$
   (c) En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \text{Ker}(Q_1(u))$.
3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.
4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

   Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale à 2 ou égale à 3).

Exercice 2

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :
• à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules

dans l'urne et on dit qu'une paire est reconstituée.
• si les deux boules portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, et tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour reconstituer i paires.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
   (b) Donner, sans calcul la valeur de l'espérance de T_1.
2. Compléter la partie principale du programme suivant afin qu'il affiche une réalisation de la variable T_1 :

```
begin
randomize; readln(n);t := 0;
repeat a := random(n)+1;b := random(n)+1;
t := t+1;
until......;
writeln(t);
end.
```

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2,n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.
   (a) Que représente la variable X_i ?
   (b) Déterminer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ la loi de X_i ainsi que son espérance.
   (c) En déduire que T_n admet une espérance mathématique et que l'on a $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.
4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent.
   On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.
   (a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 0])$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n = 0])$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}([S_n = n]) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.
5. Expliquer ce que fait la partie principale du programme suivant :

```
begin
randomize; readln(n);m := n;z := 0;
for k := 1 to n do
begin
a := random(m)+1;b := random(m)+1;
if a=b then begin z := z+1; m := m-1;end;
end;
writeln(z);
end.
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que, pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est convergente.

   On admet que l'application, notée $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P,Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

   est un produit scalaire. On note $\|\ \|$ la norme associée.

2. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :

$$\langle P',Q \rangle + \langle P,Q' \rangle = \langle P,Q \rangle - P(0)Q(0).$$

   (b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur , alors on a $|P(0)| = \|P\|$.
3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant :

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ d^\circ(L_k) = k \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$

   (a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ vérifiant les relations $\mathcal{R}$.
   Montrer que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $L_k = M_k$.
   (b) On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille obtenue (à partir de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
      i. Justifier, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, la relation $P_k(0) \neq 0$.
      ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant $\mathcal{R}$.
   (c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2.

Problème

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire M_n, définie par : $M_n = \sup(X_1, X_2, \ldots X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
On cherche alors des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, telles que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante.
La fonction exponentielle sera indifféremment notée $(x \to e^x)$ ou exp.

Partie 1 - La loi exponentielle

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1. Soit g la fonction définie que $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x}\exp(-e^{-x})$.
   (a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note G une variable aléatoire admettant g comme densité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition, notée F_G, de la variable G.
2. (a) Donner, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable M_n.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Partie 2 - La loi normale

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est une loi normale centrée réduite. Soit φ la densité de X_1.

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}du$ est convergente et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}du.$$

(b) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x^2} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

puis que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq \mathbb{P}(X_1 > x)(1 + \frac{1}{x^2}).$$

2. Soit c un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $\frac{\phi(x)}{x} = \frac{c}{n}$ admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution que l'on notera x_n.
3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
4. Montrer que pour tout entier n non nul,

$$x_n^2 + 2\ln x_n = 2\ln n - \ln(2c^2\pi).$$

5. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 4., montrer que

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}.$$

En déduire que l'on peut écrire pour $n \geq 2$,

$$x_n = \sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n \to +\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0.$$

6. (a) En utilisant la question 4., montrer que pour tout entier $n \geq 2$;

$$2(\sqrt{2\ln n})\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

(b) En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du a), montrer que

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\ln(\ln n).$$

En déduire que

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n) \text{ où } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_2(n)(\frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)}) = 0.$$

On admet alors qu'en poursuivant le développement asymptotique, que l'on peut écrire pour tout entier n supérieur à 2 :

$$x_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon(n)$$

$$\text{avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2\ln(n)} = 0.$$

7. On pose pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln n}}$ et $b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}$.
Montrer à l'aide des questions précédentes, que pour tout x réel, et pour tout entier $n \geq 2$, en posant $c = e^{-x}$ que :

(a)

$$a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$$

(b)

$$\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}.$$

(c) En déduire , en utilisant la question 1.b. que $\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n)$ puis que la suite $(\frac{M_n - b_n}{a_n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable G (la variable G est définie dans la partie 1.)

Exercice 1

1. Par définition de Q, on a :

$\forall x \in E, Q(u)(x) = 0$ et comme $Q(X) = Q_1(X)(X-1)$:
$\forall x \in E, (Q_1(u) \circ (u - Id))(x) = 0$ soit :
$\forall x \in E, Q_1(u)\big((u - Id)(x)\big) = 0$ et comme $\{(u - Id)(x), x \in E\} = \mathrm{Im}\,(u - Id)$:

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(u - Id) \subset \mathrm{Ker}\,(Q_1(u))}$$

2. a) Soit $x \in E_1$. $(u - Id)(x) = 0$ donc $u(x) = x$.

▷ Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proprosition $\mathcal{P}_k$: "$u^k(x) = x$" est vraie.

. Comme $u^0 = Id, u^0(x) = x$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie. On a :

$u^{k+1}(x) = u\left(u^k(x)\right)$ soit par hypothèse de récurrence :
$= u(x)$ et comme $x \in E_1$:
$= x.$

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

. On peut donc conclure que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_k$ est vraie.

▷ Comme $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$, il existe $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que : $Q_1(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$.On a alors :

$Q_1(u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$ et comme : $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = x$:
$= \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x$ soit :
$= \left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\right) x$ et comme $\sum\limits_{k=0}^{d} a_k = Q_1(1)$:

$$\boxed{\text{Si } x \in E_1, Q_1(u)(x) = Q_1(1).x}$$

b) Soit $x \in E_1 \cap \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big)$. Comme $x \in E_1$, d'après le résultat précédent, on a :

$Q_1(1).x = Q_1(u)(x)$ et comme $x \in \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big)$:
$Q_1(1).x = 0$ et comme $Q_1(1) \neq 0$:
$x = 0.$

Ainsi $E_1 \cap \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big) \subset \{0_E\}$. Comme $0_E \in E_1 \cap \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ (car $E_1 \cap \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ est un espace vectoriel), on peut conclure :

$$\boxed{E_1 \cap \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big) = \{0_E\}}$$

c) Comme $u \in \mathcal{L}(E)$, $E_1 \subset E$ et $\operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) \subset E$. De plus, comme E est de dimension finie n, d'après le théorème du rang, on a :

$\dim \operatorname{Im}\,(u - Id) + \dim \operatorname{Ker}\,(u - Id) = n$ et d'après le résultat de la question 1. :
$n \leqslant \dim \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) + \dim E_1$

Or, d'après le résultat précédent, comme $E_1 \cap \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) = \{0_E\}$, on a :

$E_1 + \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) = E_1 \oplus \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ soit :
$\dim\Big(E_1 + \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)\Big) = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ et comme $E_1 + \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) \subset E$:
$\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) \leqslant n$ soit :
$\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}\,\big(Q_1(u)\big) = n$.

Comme E_1 et $\operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\begin{cases}\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) = n \\ E_1 \cap \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) = \{0_E\}\end{cases}$, on peut conclure :

$$\boxed{E = E_1 \oplus \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)}$$

3. Soit $x \in E$. Comme $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)$, il existe un unique couple $(y, z) \in E_1 \times \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ tel que : $x = y + z$. Comme $Q_1(u)$ est une application linéaire, on a :

$Q_1(u)(x) = Q_1(u)(y) + Q_1(u)(z)$ et comme $z \in \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ et $y \in E_1$, d'après le résultat de la question 2.a :
$= Q_1(1).y$.

Comme $Q_1(1) \neq 0$, $Q_1(u)(x) \neq 0$ si et seulement si $y \neq 0$. Ainsi, $Q_1(u) \neq 0$ si et seulement si $E_1 \neq \{0_E\}$ donc $Q_1(u) = 0$ si et seulement si $E_1 = \{0_E\}$ et on peut conclure :

$$\boxed{Q_1(u) = 0 \text{ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de } u}$$

4. Deux cas se présentent :

. Si $\dim E_1 = 3$, comme $E_1 \subset E$ et $\dim E_1 = \dim E$, $E_1 = E$, donc $u = Id$ et u est diagonalisable.

. Si $\dim E_1 = 2$, par définition de Q et de Q_1, $Q_1 = (X+1)^2$, et d'après le résultat de la question 2.c, $\dim \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big) = \dim E - \dim E_1 = 1$.
Soit $x \in \operatorname{Ker}\big(Q_1(u)\big)$ tel que $x \neq 0_E$. Deux cas se présentent alors :
◇ Si $(u + Id)(x) = 0$, alors x est vecteur propre de u associé à la valeur propre -1,
◇ Si $(u + Id)(x) \neq 0$, comme $(u + Id)\big((u + Id)(x)\big) = 0$, alors $(u + Id)(x)$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre -1.
Dans tous les cas, -1 est valeur propre de u. Soit E_{-1} le sous-espace propre de u associé à la valeur propre -1. Comme $\dim E_{-1} \geqslant 1$, $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_{-1} + \dim E_1 \leqslant 3$, on en déduit que $\dim E_{-1} = 1$. Ainsi $\dim E_{-1} + \dim E_1 = \dim E$ donc u est diagonalisable et dans tous les cas on peut conclure :

$$\boxed{\text{Si la dimension de } E_1 \text{ est supérieure ou égale à 2, } u \text{ est diagonalisable}}$$

Exercice 2

1. a) ► Par définition, $T_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit A_k l'événement : "On obtient une paire au $k^{ème}$ tirage". On a :

$$\forall k \geqslant 2, P([T_1 = k]) = P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{A_j}\right] \cap A_k\right)$$

et comme $P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{A_j}\right]\right) \neq 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$= P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})...P_{\bigcap_{j=1}^{k-2}\overline{A_j}}(\overline{A_{k-1}})P_{\bigcap_{j=1}^{k-1}\overline{A_j}}(A_k).$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ sachant que l'événement $\bigcap_{j=1}^{i} \overline{A_j}$ est réalisé, l'urne contient les $2n$ boules avant le $(i+1)^{ème}$ tirage. Il y a donc n cas favorables à la réalisation de A_{i+1} (choix du numéro de la paire obtenue et des deux boules portant ce numéro) et $\binom{2n}{2}$ cas possibles. Par équiprobabilité, on en déduit :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, P_{\bigcap_{j=1}^{i}\overline{A_j}}(A_{i+1}) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} \quad \text{et comme } \binom{n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} :$$
$$= \frac{1}{2n-1}.$$

Ainsi : $\forall i \in \mathbb{N}^*, P_{\bigcap_{j=1}^{i}\overline{A_j}}(\overline{A_{i+1}}) = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$. Comme $P(A_1) = \dfrac{1}{2n-1}$ (pour les mêmes raisons), on en déduit :

$$\boxed{T_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et : } \forall k \in \mathbb{N}^*, P([T_1 = k]) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \frac{1}{2n-1}}$$

► On en déduit donc :

$$\boxed{T_1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2n-1}}$$

b) On a alors :

$$\boxed{E(T_1) = 2n - 1}$$

2. Le début de programme de cette question ne permet pas d'afficher une simulation de la loi de T_1, puisqu'en affectant `random(n)+1` à `a` et `random(n)+1` à `b`, le programme choisit deux fois un numéro aléatoire entre 1 et n et considère donc qu'on choisit les deux numéros dans deux urnes distinctes comportant chacune n boules numérotées de 1 à n. Ainsi, la probabilité de reconstituer une paire est $\dfrac{1}{n}$ (on choisit un numéro au hasard dans la première urne et on obtient une paire si le numéro tiré dans la deuxième urne est le même). En considérant que les tirages se font dans deux urnes distinctes, on aurait le programme suivant :

```
Begin
randomize ; readln(n) ; t:=0;
repeat a:=random(n)+1 ; b:=random(n)+1 ;
t:=t+1;
until a=b;
writeln(t);
end.
```

Pour simuler la loi de T_1 décrite par l'énoncé (une seule urne contenant $2n$ boules), il suffit de simuler une expérience dont le succès se produit avec la probabilité $\frac{1}{2n-1}$, soit par exemple "Obtenir le numéro 1 en choisissant au hasard un numéro entre 1 et $2n-1$". On aurait alors :

```
Begin
randomize; readln(n); t:=0;
repeat a:=random(2n-1)+1;
t:=t+1;
until a=1;
writeln(t);
end.
```

3. a) Comme, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, T_i est la variable aléatoire égale au temps d'attente de la $i^{ème}$ paire, X_1 est la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première paire et, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, X_i est la variable aléatoire égale au temps d'attente entre les instants d'obtention des $(i-1)^{ème}$ et $i^{ème}$ paire. En considérant qu'avant le premier tirage on a obtenu une $0^{ème}$paire, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ X_i \text{ est la variable aléatoire égale au temps d'attente entre les instants d'obtention des } (i-1)^{ème} \text{ et } i^{ème} \text{ paires}}$$

b) Après l'obtention de la $(i-1)^{ème}$ paire, l'urne contient $n-i+1$ paires de boules de même numéro, et X_i est le temps d'attente de la première paire dans cette nouvelle urne. En substituant $n-i+1$ à n dans le résultat de la question 1.a, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2n-2i+1}$ et on a :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!] : X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P([X_i = k]) = \left(1 - \frac{1}{2n-2i+1}\right)^{k-1} \frac{1}{2n-2i+1} \text{ et } E(X_i) = 2n-2i+1}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} X_i &= \sum_{i=2}^{n}(T_i - T_{i-1}) && \text{les termes s'éliminant deux à deux :}\\ &= T_n - T_1 && \text{et comme } T_1 = X_1 :\\ \sum_{i=1}^{n} X_i &= T_n. \end{aligned}$$

Comme, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance, T_n admet une espérance et par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}E(T_n) &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) && \text{et d'après le résultat de la question 3.b :}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1) && \text{soit :}\\ &= 2\sum_{i=1}^{n}(n-i)+n && \text{et en posant } i' = n-i :\\ &= 2\sum_{i=0}^{n-1} i + n && \text{soit :}\\ &= 2\frac{(n-1)n}{2} + n && \text{et donc :}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(T_n) = n^2}$$

4. a) Par définition, on a [1] :

$$\begin{aligned}P([S_n = 0]) &= P([T_1 > n]) && \text{soit :}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P([T_1 = k]) && \text{et d'après le résultat de la question 1.a :}\\ &= \frac{1}{2n-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{k-1} && \text{soit en posant } k' = k-n-1 :\\ &= \left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{n}\frac{1}{2n-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{k} && \text{et comme } \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{k} = 2n-1 :\end{aligned}$$

$$\boxed{P([S_n = 0]) = \left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{n}}$$

b) Comme : $\forall n \geqslant 2, 1-\frac{1}{2n-1} > 0$, on a : $\forall n \geqslant 2$, $P([S_n = 0]) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\right)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}&\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n-1} && \text{soit :}\\ &n\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n-1} && \text{et comme } 2n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n :\\ &\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{1}{2} && \text{et comme exp est continue en } -\frac{1}{2} :\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P([S_n = 0]) = e^{-\frac{1}{2}}}$$

c) Avec les notations de la question 1.a, on a :

$$\begin{aligned}P([S_n = n]) &= P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right]\right) && \text{et comme } P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right]\right) \neq 0, \text{ d'après la formule des probabilités composées :}\\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j}(A_n).\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, sachant que l'événement $\bigcap_{j=1}^{k} A_j$ est réalisé, l'urne contient $2(n-k)$ boules avant le $(k+1)^{ème}$ tirage, soit $n-k$ paires. Il y a donc $n-k$ cas favorables à la réalisation de A_{k+1} (choix du numéro de la paire obtenue) et $\binom{2(n-k)}{2}$ cas possibles et par équiprobabilité, on en déduit :

$$\begin{aligned}&\forall k \in [\![1,n-1]\!], P_{\bigcap_{j=1}^{k} A_j}(A_{k+1}) = \frac{n-k}{\binom{2(n-k)}{2}} && \text{et comme } P(A_1) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} :\\ &P([S_n = n]) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{\binom{2(n-k)}{2}} && \text{et comme } \binom{2n-k}{2} = \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2} :\\ &P([S_n = n]) = 2^n\frac{n(n-1)\ldots 1}{(2n)(2n-1)\ldots 2\times 1} && \text{et donc :}\end{aligned}$$

1. On aurait également pu utiliser $[S_n = 0] = \left[\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}\right]$ et faire le même raisonnement que dans la question 1.a.

$$\boxed{P(S_n = n]) = \frac{2^n n!}{(2n)!}}$$

5. A nouveau, comme le programme affecte `random(m)+1` à `a` et `random(m)+1` à `b`, il choisit deux fois un numéro aléatoire entre 1 et m et considère donc qu'on choisit les deux numéros dans deux urnes distinctes comportant chacune m boules numérotées de 1 à m. Comme initialement `m:=n` et `m` diminue de 1 lorsque `a=b`, le programme effectue une simulation de S_n lorsqu'on effectue des tirages de deux boules, une dans chaque urne, et compte donc le nombre de paires obtenues en n tirages (en affecte le résultat à `z`).

Exercice 3

1. Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$. L'application $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent alors :

- Si $P=0$ ou si $Q=0$: $\forall t\in\mathbb{R}_+, P(t)Q(t)e^{-t}=0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ converge.
- Si $P\neq 0$ et si $Q\neq 0$, il existe $a\in\mathbb{R}^*$ et $d\in\mathbb{N}$ tels que $\deg PQ = d$. Ainsi, on a :

$P(t)Q(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} at^d$ d'où :

$\left|t^2P(t)Q(t)e^{-t}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} |a|\, t^{d+2}e^{-t}$ et comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{d+2}e^{-t}=0$ (par croissances comparées) :

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left|t^2P(t)Q(t)e^{-t}\right|=0$ et donc :

$\left|P(t)Q(t)e^{-t}\right| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge (comme intégrale de Riemann avec $\alpha>1$) et comme : $\forall t>0, \begin{cases}\dfrac{1}{t^2}>0\\ \left|P(t)Q(t)e^{-t}\right|\geqslant 0\end{cases}$, par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|P(t)Q(t)e^{-t}\right|dt$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ converge.

Ainsi dans tous les cas on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt \text{ converge}}$$

2. a) Comme $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2, (P',Q')\in(\mathbb{R}_n[X])^2$ et on a :

$$\begin{aligned}\left\langle P',Q\right\rangle+\left\langle P,Q'\right\rangle &= \int_0^{+\infty} P'(t)Q(t)e^{-t}dt+\int_0^{+\infty} P(t)Q'(t)e^{-t}dt \quad \text{soit par linéarité de l'intégration :}\\ &= \int_0^{+\infty}\left(P'(t)Q(t)+P(t)Q'(t)\right)e^{-t}dt \quad \text{d'où :}\\ &= \int_0^{+\infty}(PQ)'(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

Les fonctions PQ et $t\mapsto e^{-t}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, par intégration par parties, on a alors :

$\forall x\in\mathbb{R}_+, \displaystyle\int_0^x (PQ)'(t)e^{-t}dt = \left[P(t)Q(t)e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x P(t)Q(t)e^{-t}dt.$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ existe et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}=0$ (d'après le raisonnement de la question 1.), par passage à la limite, on a alors :

$$\boxed{\left\langle P',Q\right\rangle+\left\langle P,Q'\right\rangle = \langle P,Q\rangle - P(0)Q(0)}$$

b) Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall R\in\mathbb{R}_n[X]/\deg R<\deg P, \langle P,R\rangle=0$. D'après le résultat précédent pour $Q=P$, comme $\langle .,.\rangle$ est symétrique, on a :

$(P(0))^2=\|P\|^2-2\left\langle P,P'\right\rangle$ et comme $\left\langle P,P'\right\rangle=0$ (car $\deg P'<\deg P$) :

$(P(0))^2=\|P\|^2$ et donc :

$\boxed{\text{Si } P \text{ un polynôme non constant de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que} : \forall R \in \mathbb{R}_n[X]/ \deg R < \deg P, \langle P, R\rangle = 0, \text{ alors} : |P(0)| = \|P\|}$

3. a) Comme, pour tout $k \in [\![0,n]\!], \deg L_k = k$, $\mathcal{F}_k = (L_0, L_1, ..., L_k)$ est une famille de $k+1$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{R}_k[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_k[X] = k+1$, $\mathcal{F}_k$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$.
Comme : $\forall k \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![0,k-1]\!], \langle L_k, L_j\rangle = 0$ et comme $\mathcal{F}_{k-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, $L_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$. De même, $\mathcal{M}_k = (M_0, M_1, ..., M_k)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0,n]\!], L_k &= \sum_{j=0}^{k} \langle L_k, M_j\rangle M_j && \text{et comme} : \forall j \in [\![0,k-1]\!], \langle L_k, M_j\rangle = 0 \text{ (car } M_j \in \mathbb{R}_{k-1}[X]) : \\ &= \langle L_k, M_k\rangle M_k && \text{et en évaluant cette égalité en 0, comme } L_k(0) = M_k(0) = 1 :\end{aligned}$$

$\forall k \in [\![0,n]\!], \langle L_k, M_k\rangle = 1$ et donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], L_k = M_k}$$

b) i. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$ et :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], P_k = \frac{X^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle X^k, P_j\rangle P_j}{\left\| X^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle X^k, P_j\rangle P_j \right\|}, \text{ donc par récurrence} : \forall k \in [\![0,n]\!], \deg P_k = k \text{ et } \mathcal{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après le raisonnement de la question précédente, on a : $\forall k \in [\![1,n]\!], P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$. Ainsi, d'après le résultat de la question 2.b, on a :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,n]\!], |P_k(0)| &= \|P_k\| && \text{et comme } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] : \\ &= 1 && \text{et donc :} \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Comme $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], P_k(0) \neq 0}$$

ii. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, soit $L_k = \dfrac{1}{P_k(0)} P_k$ et $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, ..., L_n)$.

▷ Comme $\mathcal{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall k \in [\![0,n]\!], \deg P_k = k$, $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall k \in [\![0,n]\!], \deg L_k = k$.

▷ $\forall k \in [\![0,n]\!], L_k(0) = \dfrac{P_k(0)}{P_k(0)} = 1$.

▷ Comme $L_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ et $L_0(0) = 1$, $L_0 = 1$.

▷ $\mathcal{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall k \in [\![0,n]\!], \deg P_k = k$. D'après le raisonnement de la question 3.a : $\forall k \in [\![1,n]\!], L_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$ et d'après le résultat de la question 2.b, on a donc :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,n]\!], \|L_k\| &= |L_k(0)| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Enfin, d'après le résultat de la question 2.a pour $P = Q = L_0$, comme $L_0' = 0$, $\|L_0\|^2 = (L_0(0))^2$, donc $\|L_0\| = |L_0(0)| = 1$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ vérifie } \mathcal{R}}$$

c) ► D'après le résultat de la question 3.(b)ii., il existe une famille $\mathcal{B}'$ de polynômes vérifiant $\mathcal{R}$. De plus, d'après le résultat de la question 3.a, cette famille est unique et on peut conclure :

$$\boxed{\text{Il existe une unique famille de polynômes vérifiant } \mathcal{R}}$$

► Par définition et comme $\|1\| = \Gamma(1) = 1$, $P_0 = 1$, on a :

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{X - \langle X, 1\rangle 1}{\|X - \langle X, 1\rangle 1\|} && \text{et comme } \langle X, 1\rangle = \Gamma(2) = 1 : \\ &= \frac{X-1}{\|X-1\|} && \text{et comme } \|X-1\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, 1\rangle + \|1\|^2 = \Gamma(3) - 2\Gamma(2) + \Gamma(1) = 1 : \\ &= X - 1 && \text{et :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 - \langle X^2, P_0\rangle P_0}{\|X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 - \langle X^2, P_0\rangle P_0\|} && \text{et comme } \langle X^2, P_1\rangle = \langle X^2, X-1\rangle = \Gamma(4) - \Gamma(3) = 4 \text{ et } \langle X^2, 1\rangle = \Gamma(3) = 2 : \\ &= \frac{X^2 - 4P_1 - 2P_0}{\|X^2 - 4P_1 - 2P_0\|}. && \text{soit :} \\ &= \frac{X^2 - 4X + 2}{\|X^2 - 4P_1 - 2P_0\|}.\end{aligned}$$

Or, comme $P_0 \perp P_1$, on a :

$$\begin{aligned}\|X^2 - 4P_1 - 2P_0\|^2 &= \|X^2\|^2 + 16\|P_1\|^2 + 4\|P_0\|^2 - 8\langle X^2, P_1\rangle - 4\langle X^2, P_0\rangle && \text{d'où :} \\ &= \Gamma(5) + 16 + 4 - 8 \times 4 - 4 \times 2 : \\ &= 24 + 16 + 4 - 32 - 8 : \\ &= 4.\end{aligned}$$

Comme $P_1(0) = -1$ et $P_2(0) = 1$, on peut conclure :

$$\boxed{L_1 = -X + 1 \text{ et } L_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1}$$

Problème

Partie I

1. a) Comme la fonction exp est continue et positive sur $\mathbb{R}$, g est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 / a < b, \int_a^b g(x)dx = \left[e^{-e^{-x}}\right]_a^b \quad \text{soit :}$$
$$= e^{-e^{-b}} - e^{-e^{-a}}.$$

Comme $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-b} = 0$ et comme exp est continue en 0, $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-e^{-b}} = 1$ et $\lim\limits_{a\to-\infty} e^{-a} = +\infty$ donc $\lim\limits_{a\to-\infty} e^{-e^{-a}} = 0$.
En faisant tendre successivement b vers $+\infty$ et a vers $-\infty$, on alors :
$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1.$
On peut donc conclure :

$\boxed{g \text{ est une densité de probabilité}}$

b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt \quad \text{d'où :}$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \left[e^{-e^{-t}}\right]_a^x \quad \text{et comme } \lim_{a\to-\infty} e^{-e^{-a}} = 0 :$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_G(x) = e^{-e^{-x}}}$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant F_{M_n} la fonction de répartition de M_n, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_{M_n}(x) &= P([M_n \leqslant x]) && \text{soit :}\\
&= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right) && \text{et comme } X_1, X_2, ..., X_n \text{ sont indépendantes :}\\
&= \prod_{k=1}^{n} P([X_k \leqslant x]) && \text{et en notant } F_X \text{ la fonction de répartition de la loi } \varepsilon(\lambda) :\\
&= (F_X(x))^n && \text{et donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_{U_n}(x) &= P([\lambda M_n - \ln(n) \leqslant x]) && \text{et comme } \lambda > 0 :\\
&= F_{M_n}\left(\frac{x + \ln(n)}{\lambda}\right) && \text{et d'après le résultat précédent :}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - e^{-\lambda \frac{x+\ln(n)}{\lambda}}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases} && \text{soit :}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases} && \text{d'où :}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right) & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_x, x \geqslant -\ln(n)$.

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$, on a alors :

$\forall x \in \mathbb{R}, n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-x}$ d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ et comme exp est continue sur $\mathbb{R}$ et d'après le résultat de la question 1.b :

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = F_G(x).$

On peut donc conclure :

$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } G}$

Partie II

1. a) Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $x < y$. Les fonctions $u \mapsto -\frac{1}{u}$ et φ étant de classe C^1 sur $[x,y]$, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{\varphi(u)}{u^2}du &= \left[-\frac{\varphi(u)}{u}\right]_x^y + \int_x^y \frac{\varphi'(u)}{u}du && \text{soit :}\\
&= \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(y)}{y} + \int_x^y \frac{\varphi'(u)}{u}du && \text{et comme : } \forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) = -\frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} = -u\varphi(u) :\\
&= \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(y)}{y} - \int_x^y \varphi(u)du.
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} = 0$ et comme $\int_x^{+\infty} \varphi(u)du = P([X_1 > x])$ (car X_1 est une variable aléatoire de densité φ), on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}du \text{ converge et : } \forall x > 0, P([X_1 > x]) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}du}$$

b) ► La fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall u \in [x, +\infty[, 0 \leqslant \frac{1}{u^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ et comme $\varphi(u) \geqslant 0$:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall u \in [x, +\infty[, 0 \leqslant \frac{\varphi(u)}{u^2} \leqslant \frac{\varphi(u)}{x^2}$ soit par croissance de l'intégration, comme $\int_x^{+\infty} \varphi(u)du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}du$ convergent :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}du \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} \varphi(u)du$ et d'après le résultat précédent :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} - P([X_1 > x]) \leqslant \frac{1}{x^2} P([X_1 > x])$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{P([X_1 > x])}{x^2} \leqslant P([X_1 > x]) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}}$$

► D'après le résultat précédent, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P([X_1 > x]) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x} \leqslant \dfrac{P([X_1 > x])}{x^2} + P([X_1 > x])$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P([X_1 > x]) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant P([X_1 > x]) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

2. [2]Soit $\psi : x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x}$. ψ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \psi'(x) &= \frac{1}{x^2}\left(x\varphi'(x) - \varphi(x)\right) && \text{et comme } \varphi'(x) = -x\varphi(x) : \\ &= -\frac{\varphi(x)}{x^2}(x^2+1) && \text{et comme } \varphi(x) > 0 : \\ &< 0. \end{aligned}$$

Ainsi ψ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$, ψ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $c > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c}{n} \in \mathbb{R}_+^*$ et on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in \mathbb{R}_+^* / \frac{\varphi(x_n)}{x_n} = \frac{c}{n}}$$

3. Comme ψ réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ψ^{-1} existe et réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \psi^{-1}(t) = +\infty$. De plus, comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \psi^{-1}\left(\dfrac{c}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{c}{n} = 0$, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty}$$

4. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \psi(x_n) = \dfrac{c}{n}$, par définition de ψ, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}x_n} = \dfrac{c}{n}$ et comme $e^{-\frac{x_n^2}{2}} > 0, \sqrt{2\pi} > 0, x_n > 0, c > 0$ et $n > 0$, en composant par ln :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\dfrac{x_n^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \ln(x_n) = \ln(c) - \ln(n)$ et en multipliant par -2 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^2 + \ln(2\pi) + 2\ln(x_n) = -2\ln(c) + 2\ln(n)$ et comme $-2\ln(c) - \ln(2\pi) = -\ln(2c^2\pi)$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n^2 + 2\ln(x_n) = 2\ln(n) - \ln(2c^2\pi)}$$

5. ► ▷ Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n > 0$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{x_n^2 + 2\ln(x_n)}{x_n^2} = 1 + \dfrac{\ln\left(x_n^2\right)}{x_n^2}$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^2 = +\infty$ (d'après le résultat de la question II.3.), par croissances comparées :

2. Il fallait lire "$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n}$" et non "$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{c}{n}$" ($\phi$ n'étant pas définie).

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 + 2\ln(x_n)}{x_n^2} = 1 \qquad \text{soit :}$$

$$x_n^2 + 2\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n^2.$$

▷ De plus, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \frac{2\ln(n) - \ln\left(2c^2\pi\right)}{2\ln(n)} = 1 - \frac{\ln\left(2c^2\pi\right)}{2\ln(n)} \quad \text{et comme } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(2c^2\pi\right)}{2\ln(n)} = 0 :$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n) - \ln\left(2c^2\pi\right)}{2\ln(n)} = 1 \qquad \text{d'où :}$$

$$2\ln(n) - \ln\left(2c^2\pi\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n).$$

▷ D'après le résultat de la question II.4., on a alors :

$$x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n) \qquad \text{d'où :}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2}{2\ln(n)} = 1 \qquad \text{et comme la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est continue en 1 et } x_n > 0 :$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2\ln(n)}} = 1 \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n)}}$$

► Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n)}$, par définition, il existe une suite β de limite nulle telle que :

$$\forall n \geqslant 2, x_n = \sqrt{2\ln(n)}(1+\beta_n) \qquad \text{soit en posant } (\varepsilon_1(n))_{n\geqslant 2} = \left(\sqrt{2\ln(n)}\beta_n\right)_{n\geqslant 2} :$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2, x_n = \sqrt{2\ln(n)} + \varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}} = 0}$$

6. a) D'après le résultat de la question II.4. et le résultat précédent, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \left(\sqrt{2\ln(n)} + \varepsilon_1(n)\right)^2 + 2\ln\left(\sqrt{2\ln(n)} + \varepsilon_1(n)\right) = 2\ln(n) - \ln\left(2c^2\pi\right) \qquad \text{soit :}$$

$$\forall n \geqslant 2, 2\ln(n) + 2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(\sqrt{2\ln(n)}\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)\right) = 2\ln(n) - \ln\left(2c^2\pi\right) \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall n \geqslant 2, 2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(\sqrt{2\ln(n)}\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)\right) = -\ln\left(2c^2\pi\right).$$

Comme $2\ln\left(\sqrt{2\ln(n)}\right) = \ln(\ln(n)) + \ln(2)$ et $-\ln(2) - \ln(2c^2\pi) = -\ln(4c^2\pi)$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, 2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right) = -\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\left(4c^2\pi\right)}$$

b) ► ▷ Supposons qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que $\varepsilon_1(n) = 0$. On a :

$$2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right) = 0.$$

Or : $\forall n \geqslant 4, \ln(n) > 1$, donc : $\forall n \geqslant 4, -\ln\big(\ln(n)\big) - \ln(4c^2\pi) < 0$ et donc :
$\forall n \geqslant 4, \varepsilon_1(n) \neq 0$.

▷ Comme : $\forall n \geqslant 4, 2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) \neq 0$, on a :

$$\forall n \geqslant 4, \frac{2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)}{2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n)} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}} + \frac{1}{2\ln(n)} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)}{\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)}{\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}} = 1$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\ln(n)} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)}{\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}} = 0$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)}{2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n)} = 1 \qquad \text{et donc :}$$

$$2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n).$$

▷ De plus, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \frac{-\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\left(4c^2\pi\right)}{-\ln\big(\ln(n)\big)} = 1 + \frac{\ln\left(4c^2\pi\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \quad \text{et comme } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(4c^2\pi\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 0 :$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\left(4c^2\pi\right)}{-\ln\big(\ln(n)\big)} = 1 \qquad \text{d'où :}$$

$$-\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\left(4c^2\pi\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\big(\ln(n)\big).$$

D'après le résultat de la question II.6.a, on peut conclure :

$$\boxed{2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\big(\ln(n)\big)}$$

► Comme $2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\big(\ln(n)\big)$, par définition, il existe une suite δ de limite nulle telle que :

$$\forall n \geqslant 2, 2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_1(n) = -\ln\big(\ln(n)\big)(1+\delta_n) \qquad \text{et comme } \forall n \geqslant 2, 2\sqrt{2\ln(n)} > 0 :$$

$$\forall n \geqslant 2, \varepsilon_1(n) = -\frac{\ln\big(\ln(n)\big)}{2\sqrt{2\ln(n)}} - \frac{\ln\big(\ln(n)\big)}{2\sqrt{2\ln(n)}}\delta_n \qquad \text{et en posant } (\varepsilon_2(n))_{n\geqslant 2} = \left(\frac{\ln\big(\ln(n)\big)}{2\sqrt{2\ln(n)}}\delta_n\right)_{n\geqslant 2} :$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2, \varepsilon_1(n) = -\frac{\ln\big(\ln(n)\big)}{2\sqrt{2\ln(n)}} + \varepsilon_2(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{2\ln(n)}\varepsilon_2(n)}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 0}$$

7. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le résultat de la question précédente avec $c = e^{-x}$ $(c > 0)$, on a :

$$\forall n \geqslant 2, x_n = b_n - a_n \ln(e^{-x}) + \varepsilon(n) \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2, \frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} &= \frac{\varphi(x_n - \varepsilon(n))}{x_n - \varepsilon(n)} && \text{soit :}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{e^{-\frac{(x_n-\varepsilon(n))^2}{2}}}{x_n - \varepsilon_n} && \text{d'où :}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{e^{-\frac{x_n^2 - 2x_n\varepsilon(n) + (\varepsilon(n))^2}{2}}}{x_n - \varepsilon_n} && \text{soit :}\\
&= \frac{\varphi(x_n)}{x_n} \times \frac{e^{x_n\varepsilon(n) - \frac{(\varepsilon(n))^2}{2}}}{1 - \frac{\varepsilon(n)}{x_n}} && \text{et par définition de } x_n \text{ :}\\
&= \frac{e^{-x}}{n} \times \frac{e^{x_n\varepsilon(n) - \frac{(\varepsilon(n))^2}{2}}}{1 - \frac{\varepsilon(n)}{x_n}}.
\end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de la question II.5., $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2\ln(n)} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\varepsilon(n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon(n))^2 = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{x_n\varepsilon(n) - \frac{(\varepsilon(n))^2}{2}} = 1$.

De plus, d'après le résultat de la question II.3., $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{\varepsilon(n)}{x_n} = 1$ et on peut conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}}$$

c) ► Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le résultat de la question II.3., $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x + b_n = +\infty$.
Ainsi, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_x, a_n x + b_n > 0$. D'après le résultat de la question II.1.b en substituant $a_n x + b_n$ à x, on a :

$$\forall n \geqslant n_x, P([X_1 > a_n x + b_n]) \leqslant \frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \leqslant P([X_1 > a_n x + b_n])\left(1 + \frac{1}{(a_n x + b_n)^2}\right)$$

et comme $P([X_1 > a_n x + b_n]) > 0$ (car X_1 suit la loi normale centrée réduite) :

$$\forall n \geqslant n_x, 1 \leqslant \frac{\varphi(a_n x + b_n)}{P([X_1 > a_n x + b_n])(a_n x + b_n)} \leqslant 1 + \frac{1}{(a_n x + b_n)^2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x + b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{(a_n x + b_n)^2} = 1$ et d'après le théorème de l'encadrement, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(a_n x + b_n)}{P([X_1 > a_n x + b_n])(a_n x + b_n)} = 1 \quad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} P([X_1 > a_n x + b_n])}$$

► Pour tout $n \geqslant 2$, comme $a_n > 0$, en notant $F_{\frac{M_n - b_n}{a_n}}$ la fonction de répartition de $\dfrac{M_n - b_n}{a_n}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2, \forall x \in \mathbb{R}, F_{\frac{M_n-b_n}{a_n}}(x) &= P\left(\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right]\right) && \text{et comme } a_n > 0 \text{ :}\\
&= P([M_n \leqslant a_n x + b_n]) && \text{et d'après le raisonnement de la question I.2.a :}\\
&= (1 - P([X_1 > a_n x + b_n]))^n && \text{soit :}\\
&= \exp(n \ln(1 - P([X_1 > a_n x + b_n]))).
\end{aligned}$$

Or, d'après le résultat précédent , on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, P([X_1 > a_n x + b_n]) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} && \text{et d'après le résultat de la question II.7.b :}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n} && \text{et comme } \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0 \text{ :}
\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, n\ln(1 - P([X_1 > a_n x + b_n])) \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-x}$ d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1 - P([X_1 > a_n x + b_n])) = -e^{-x}$ et comme exp est continue en $-e^{-x}$:

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} F_{\frac{M_n-b_n}{a_n}}(x) = \exp(-e^{-x})$ et d'après le résultat de la question I.1.b :

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} F_{\frac{M_n-b_n}{a_n}}(x) = F_G(x)$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers la variable } G}$$