N°47

Novembre 2008

Référence

LA REVUE DES PRÉPAS

Avec Klub.net Prépa

Culture Générale

> Histoire des idées, esprit d'un programme

> Baudelaire : extraire les fleurs du mal

> Le rapport de la vie et de la beauté dans *"La double vie de Véronique"* de Krysztof Kieslovski

> Qu'est-ce qu'une action juste ?

Histoire, Géo. Géopolitique / Analyse économique

> Dossier : L'arme bleue. Une géopolitique de l'eau

> Le capitalisme peut-il survivre ?

Langues vivantes : anglais

> The Maverick v. the Black Kennedy. A few quotes from and facts about the two contenders for the White House

> Corrigés des épreuves CCIP 2008, langues 1 et 2

Concours et Grandes Écoles

> Cas d'écoles pour mises en examen

Mathématiques

> Corrigés des épreuves HEC 2008 voies S et E

> Corrigés des épreuves 2008 voies S et E spécifiques à l'EM Lyon

GROUPE SIGMA COMMUNICATION

ISSN 1266-1627

4,50 €

Le rapport de la vie e dans “la double vie d de Krysztof Kieslows

Jean-Marc Sourdillon
Professeur de lettres en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Jeanne d’AAlbret (St-Germ

Culture Générale

“Il paraît qu’on n’a plus le droit d’employer le mot beauté. C’est vrai qu’il est terriblement usé. Je connais bien la chose pourtant”. Philippe Jaccottet.[1]

Interrogeant dans la perspective du surréalisme le rapport de la vie et de la beauté, André Breton, dans *L’Amour fou* dégage trois caractéristiques de ce qu’il appelle dans une formule désormais devenue célèbre “la beauté convulsive”. Une telle beauté, dit-il, doit lier en elle le mouvement et le repos, présenter spontanément la rigueur transparente du cristal de quartz et enfin, sous la forme de la trouvaille, donner à la vie inquiète ou bien hésitante une solution inattendue qui la déborde de toute part. *Une telle beauté ne pourra se dégager que du sentiment poignant de la chose révélée, que de la certitude intégrale procurée par l’irruption d’une solution qui, en raison de sa nature même, ne pouvait nous parvenir par les voies logiques ordinaires. Il s’agit en pareil cas, en effet, d’une solution toujours excédente, d’une solution certes rigoureusement adaptée et pourtant très supérieure au besoin […] Elle seule a le pouvoir d’agrandir l’univers, de le faire revenir partiellement sur son opacité, de nous faire découvrir en lui des capacités de recel extraordinaires, proportionnées aux besoins innombrables de l’esprit. (L’Amour fou, p.18-22).*[2]

C’est une pareille formule de la beauté comme “solution excédente” qu’un film comme *La double vie de Véronique* explore, sans que la référence au surréalisme ne soit à aucun moment donnée, pas même d’une façon implicite. Et si elle ne l’est pas, c’est qu’elle ne peut pas l’être dans la mesure où l’irruption bouleversante de la beauté dans la vie d’un individu n’est pas pour Kieslowski la manifestation de “vases communicants” entre le monde et l’inconscient mais plutôt celle d’un lien mystérieux entre les êtres, dont la nature ne serait pas bien déterminée. Pourtant la réponse donnée par la beauté aux incertitudes de la vie prend la même forme, celle de retrouvailles inattendues et insoupçonnables avec soi-même. *C’est vraiment comme si je m’étais perdu et qu’on vînt tout à coup me donner de mes nouvelles*, écrit Breton.

Nous nous proposons de montrer, par l’étude de ce film, ce que *fait* la beauté quand elle s’introduit dans une vie individuelle, quelle transformation elle y opère et pourquoi l’on peut dire de certaines vies qu’elles sont belles.

L’ouverture nous présente deux petites filles qui se parlent à elles-mêmes avec une voix d’adulte. L’une est dans la nuit, l’autre dans la lumière, l’une voit le monde à l’endroit avec ses yeux, l’autre à l’envers dans une boule de verre. La première regarde au-dessous d’elle le ciel étoilé et attend Noël ; la seconde tient dans sa main une feuille et célèbre les vertus du prin-

(1) **Philippe Jaccottet, *Cahier de verdure*, Gallimard, p. 25.**
(2) **André Breton, *L’amour fou*, p. 18-19, Folio.**

t de la beauté e Véronique” ki

ain en Laye)

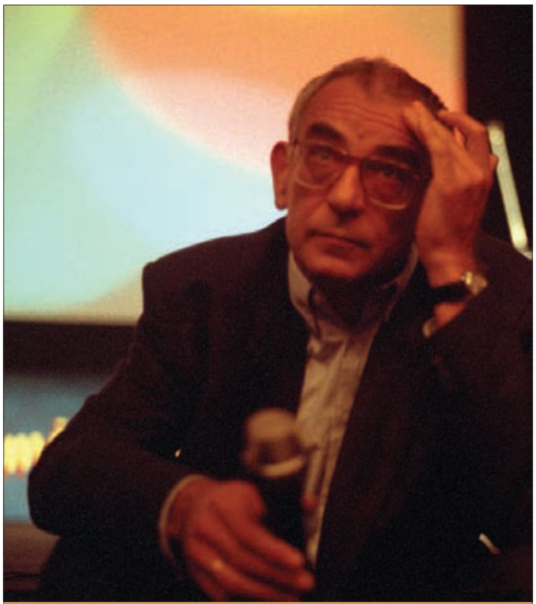
temps. Deux manières d'être attentive aux signes de la naissance ou de la renaissance. Pourtant l'une et l'autre, on l'apprendra par la suite, viennent de perdre leur mère. C'est leurs vies que nous raconte le film ou plus exactement la portion de leur vie précèdant leur rencontre. Mais cette rencontre se produit en deux temps puisque Véronique découvre l'existence de Weronika bien après que celle-ci a découvert la sienne. Rencontre non synchrone par conséquent qui explique sans doute le choix du réalisateur de nous montrer d'abord, dans une première séquence, la vie de Weronika, vie selon la beauté, avant de nous montrer, dans une séquence deux fois plus longue, la vie de Véronique, qui elle ne vit que dans l'attente de la beauté. Récit de deux vies, *la Double vie de Véronique*, est en fait composé de deux films qui se suivent mais de telle sorte que le premier est repris dans le second, la vie de Weronika étant comprise dans celle de Véronique. Cela, le titre le montre très bien, qui fait entendre W, l'initiale de Weronika, dans *double vie*.

La vie de Weronika (la vie selon la beauté)

Synopsis

Weronika est une jeune fille, orpheline de mère, qui vit avec son père dans une petite ville de province en Pologne. Sa passion est la musique. Elle chante dans une chorale, et après les répétitions elle retrouve Antek, le jeune garçon dont elle est amoureuse. Un jour, elle reçoit un appel téléphonique de sa tante, malade, qui lui propose de venir s'installer quelques temps chez elle, à Cracovie. Weronika n'hésite pas longtemps. Sans prévenir Antek, elle part vivre chez sa tante. Celle-ci craint de mourir bientôt, comme était morte sa soeur, la mère de Weronika, quelques années plus tôt, “en pleine santé”. Les femmes de la famille semblent en effet souffrir d'une “malformation cardiaque difficilement détectable”.

A Cracovie, Weronika a pu assister à une répétition de la chorale où chante l'une de ses amies. Elle ne peut s'empêcher de chanter elle



Krysztof Kieslowski
1941-1996
(Photo © Festival du film d'Europe de l'Est et Centrale de Wiesbaden)

Culture Générale

aussi et se fait remarquer par la chef de choeur à cause de l'étrange beauté de son timbre de voix. Elle est convoquée pour une audition et remporte le concours qui lui permet de chanter comme soliste lors du prochain concert. C'est en se rendant à cette audition capitale qu'elle rencontre Véronique, sur la place centrale de Cracovie. Mais celle-ci, qui est en voyage d'agrément, ne la remarque pas. Un peu plus tard, après l'audition, elle est prise d'un malaise qui la jette brutalement sur un banc, au milieu des feuilles mortes.

Elle revoit une dernière fois Antek, venu la rejoindre pour une explication. Elle voudrait pouvoir lui dire ce qu'elle ressent mais elle est incapable de rien expliquer. Seuls ses gestes parlent pour elle et finissent par montrer qu'elle consent à l'amour du jeune homme. Elle meurt, brutalement, d'une crise cardiaque au cours du concert, alors qu'elle est en train de chanter. On assiste à son enterrement comme si on le voyait à travers son regard.

La tension

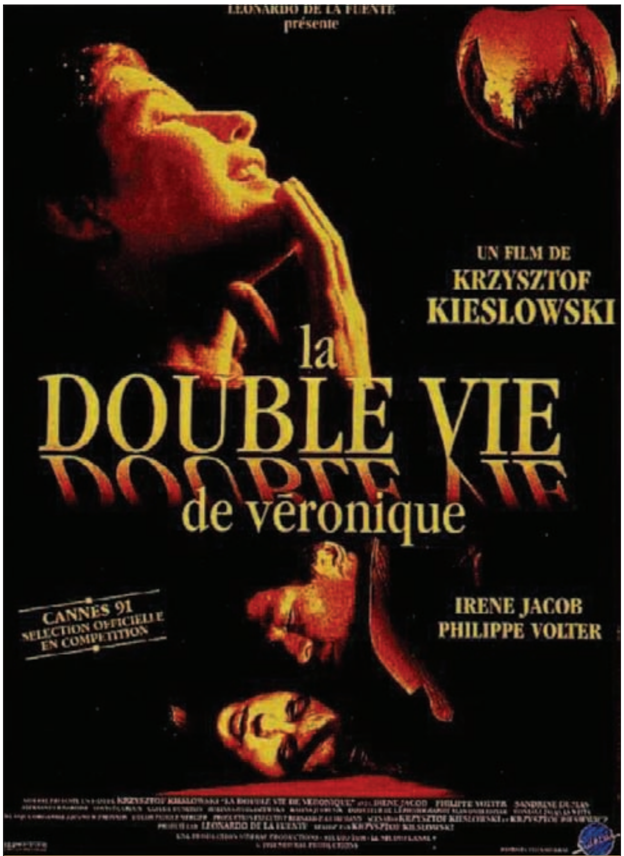
Toute cette période de la vie de Weronika, la dernière, est placée sous le signe de la tension. Par sa façon de vivre, elle a mis sa vie en tension, d'une part en acceptant toutes les propositions que les circonstances lui offrent : le départ à Cracovie, la musique, l'amour ; d'autre part en vivant chacune de ces propositions jusqu'au bout. Plusieurs images le montrent très bien. D'abord, au tout début du film, la note qu'elle tient le plus longtemps possible alors qu'il s'est mis à pleuvoir et que toutes les autres choristes sont depuis longtemps parties se protéger ; puis cet élastique que Weronika tord autour de son doigt pendant qu'elle chante, lors de sa première audition, et qui tout à coup se rompt quand elle commence à monter dans les aigus. Sa façon de se déplacer toujours en courant (et même, avec joie, dans les flaques) ou alors, quand elle est avec Antek, en moto (on réentendra la moto au moment où Véronique découvrira son existence dans la seconde partie du film) sont autant de marques de cette façon haletante de vivre qui caractérise la vie de la jeune fille. On la retrouve également dans sa façon de dormir, puisqu'elle se réveille, dressée sur son lit, en proie à des cauchemars, comme s'il lui était impossible de se reposer sereinement.

On le voit, Weronika vit au bord de la rupture, longeant en permanence les limites de ses possibilités et très souvent les traversant. L'excès est sa loi ; elle est amenée sans cesse à se dépasser, comme mue par un excès de vitalité, d'un insatiable désir de vivre qui la pousse à se transcender dans l'amour (Antek, à qui elle se donne très tôt), la compassion (pour sa tante, qui est malade et lui demande de la rejoindre à Cracovie) ou dans l'expression artistique, comme si elle répondait à un appel venu du fond de sa vie et qui lui demandait toujours davantage pour devenir elle-même et accomplir son être. A la question qu'elle se pose et qui la sort brutalement de son sommeil : *qu'est-ce que je veux vraiment ?* son père répond : *sans doute beaucoup de choses.* Ce que veut Weronika, c'est en effet plus de vie, plusieurs vies même, pouvoir déployer son être totalement dans les divers possibles que les circonstances lui proposent, “épuiser, selon la formule de Pindare, le champ des possibles”. Et finalement, c'est ce que sa vie lui offre avec la part de risque que l'on sait. Ainsi, lorsqu'elle apprend qu'elle a été choisie com-me soliste, Weronika exulte. C'est comme si sa vie d'un coup explosait, et dans un couloir ensoleillé, comme pour répondre à cette émotion, elle lance brutalement sa balle de plastique transparent contre le sol de sorte qu'elle rebondit dans tous les sens, cognant sol, murs et plafond, et faisant tomber une pluie de poussières qui s'allument comme autant d'étincelles ou de paillettes d'or. L'or de la beauté auréolant une vie réussie. Peut-être aussi l'annonce de la fin prochaine, le retour à la poussière après le feu d'artifice. Aucune image n'illustre mieux non seulement le bondissement de la joie, mais surtout ce que fait la beauté quand elle s'introduit dans une vie singulière pour s'en emparer. Cette vie, elle la déploie selon tous ses possibles et la tend, l'étire jusque dans ses plus lointaines limites ; elle fait de la vie un soleil. Mais un soleil momentané.

La multiplication des signes

Tout le temps, Weronika est consciente du risque qu'elle court. C'est même comme si elle allait au-devant. A la fois, elle l'accepte et hésite, s'en effraie et s'en réjouit. Elle est attentive aux signes qui autour d'elles se multiplient pour l'avertir du danger et s'impriment dans son attention, parfois jusque dans son corps, comme cette cicatrice qu'elle porte au doigt, souvenir d'une portière de voiture que le père d'une amie avait refermée malencontreusement sur sa main, le soir de son bac de musique, comme un signe annonciateur du danger ; de la même façon, au moment de s'habiller, juste avant son ultime concert, elle se brûle la main avec son fer à repasser. Avertissement que là est la limite qu'il ne faut pas dépasser. Sa tante également l'avertira, elle, explicitement, même si elle se trompe sur l'identité de la personne menacée. Enfin, juste avant de faire la rencontre de Véronique, sur la place centrale de Cracovie, elle est heurtée violemment par un homme qui a jailli, en courant, d'une manifestation. Le choc est si brutal qu'elle tombe, entraînant dans sa chute les partitions qu'elle tenait rangées dans une chemise. Les feuilles volent et se répandent alors sur le sol autour d'elle : tous ces airs qu'elle aurait pu chanter et qu'elle ne chantera pas, tous ces possibles qu'elle aurait voulu vivre et qu'elle ne vivra pas. C'est comme si deux forces allaient en sens contraire dans la vie de Weronika : son désir de vivre et de transcender ce désir dans l'expression artistique où il s'accomplit, et le mouvement inverse aussi brutal que ce désir est violent, de l'inertie des choses, de la pesanteur des faits et de la finitude humaine – le souvenir peut-être, en elle, de la mort de sa mère, au commencement de l'existence (ou, pour le réalisateur polonais, la pesanteur de l'idéologie, reconnaissable à cette énorme statue de Lénine, qu'un camion emporte dans une rue de Cracovie).

Weronika est particulièrement lucide sur ce qui lui arrive. A sa tante qui l'interroge sur sa réussite au concours de chant, elle répond : "ça s'est *trop* bien passé". Cette lucidité se traduit dans l'acuité de son regard et de sa sensibilité. Attentive à la beauté et à la misère du monde : elle remarque aussi bien la vieille dame ployant sous le poids des sacs qu'elle porte que la beauté du paysage dans son voyage en train. Entre elle et le monde elle a placé le prisme de sa boule de plastique transparente qui le lui fait voir à l'envers ou, plus exactement, comme si elle était *de l'autre côté de la vie* selon l'expression de Céline dans son prologue au *Voyage au bout de la nuit.* Alors qu'elle est encore vivante, elle voit la vie comme si elle en avait fait le tour, comme si elle en connaissait l'autre versant. Le secret est peut-être à chercher du côté de son père, vraisemblablement architecte. Il dessine et redessine sans cesse le même motif qui représente une église étroite tout en hauteur avec quelques maisons qui l'entourent. Cette image d'une architecture simple et parfaite, Weronika la porte manifestement au fond d'elle-même puisqu'elle la retrouve aussi bien en sortant de son rêve sous la forme d'un cadre accroché au-dessus de sa tête que dans la réalité, lors de son voyage à Cracovie. Véronique rêvera elle aussi de la même construction, au moment de son recouvrement avec Weronika. Tout se passe comme si Weronika portait la figure du monde imprimée à l'intérieur d'elle.



La double vie de Véronique
L'une des jacquettes du DVD du film de 1991

Il résulte de la sensibilité de la jeune fille, dont l'acuité lui fait vivre un présent continuellement bordé par le pressentiment, et de cette façon constante de s'exposer en acceptant de se faire vulnérable, que sa vie nous paraît "belle". D'une beauté propre au romanesque, si l'on en croit Milan Kundera, c'est-à-dire surgissant *d'une soudaine densité de la vie.*

La vocation

Une pareille densité tient aux circonstances, c'est vrai, à leur soudain arrangement dans la vie de Weronika, mais pas seulement. Elle naît également de cette sorte d'appel qui vient de l'intérieur de sa vie et qui semble se répercuter dans l'air qu'elle doit chanter au concert. Ce serait alors par sa voix et par sa mort, l'une entraînant l'autre, que Weronika révèlerait l'existence invisible pour les autres de cet appel qu'elle est seule à entendre. Appel que l'on nomme à juste-titre "vocation", parce qu'il fait surgir autour de lui, dans une vie singulière, le sens et la beauté d'un seul tenant, le sens dans la beauté. La beauté, dans cette conception, oriente l'existence ; elle serait le don du sens à la vie, ou, réciproquement, la manifestation d'une vie illuminée par le sens. Cette plénitude presque parfaite qu'atteint la vie de Weronika au moment où, répondant à sa vocation, elle s'accomplit dans le chant se montre bien sûr dans la figure sphérique et transparente de la balle de plastique où le monde se reflète à l'envers, mais aussi dans la façon de filmer de Kieslowski dans toute cette partie du film : la vie de la jeune fille baigne dans une lumière verte, ou jaune-vert comme le précise Slawomir Idziak, le chef-opérateur, lumière étrange semblable à celle d'un aquarium. La pluie tout autour, la musique à l'intérieur, Weronika semble évoluer dans sa vie à la manière d'un poisson des profondeurs. La salle de concert où l'air qu'elle doit chanter l'attend pour qu'elle accomplisse tout d'un coup son être en le chantant, est sans doute cet espace incertain qui environne les jours de Weronika et jette sur eux sa lumière depuis la fin.

Dans une telle lumière, l'apparition de la musique équivaut à l'apparition de la beauté ; c'est elle qui confère à la vie qu'elle éclaire son allure de destin. Elle donne la chair de poule, autour d'elle toutes les circonstances convergent et se concentrent, mettant en mouvement la vie de Weronika, la conduisant vers son accomplissement qui est aussi sa fin. La musique à la fois déploie les possibilités d'être de Weronika dans le temps et l'introduit au milieu des autres dans un monde ordonné où tout prend place et s'éclaire, dans l'harmonie. Mais comme la vie de Weronika, qui s'accomplit dans un milieu transparent entouré de pluie, la beauté, elle aussi, dans sa perfection de forme achevée, est environnée par ce qui la menace et fait parfois intrusion en elle comme pour mieux en donner à éprouver la fragilité : l'apparition de l'exhibitionniste au moment où Weronika est prise de son premier malaise préfigure ainsi très certainement l'apparition obscène de la mort au beau milieu du concert. L'horreur, la misère, le terrible sont en bordure de la sphère parfaite mais précaire de la beauté où tout est harmonie, plénitude, alliance du sens et de la vie ; et, au moment où la mort surgit sous la forme d'un coeur qui lâche, c'est la musique qui déraille, l'harmonie qui se brise. Tout se passe alors comme si la mort était l'ultime stade avant la beauté, la dernière dissonance avant l'harmonie finale puisque, si l'on en croit Bach qui était bien placé pour le savoir, *les dissonances sont d'autant plus grandes qu'elles approchent de l'harmonie.* Il aurait fallu que Weronika apprenne à tenir sa vie dans cette traversée de la dissonance comme elle avait tenu sa note au milieu de la pluie. Elle aura vécu “à tombeau ouvert”, selon la loi de la beauté, comme nous le fait comprendre le dernier plan de cette séquence où l'on voit ce monde qu'elle laisse et le visage des siens, son père, sa tante, Antek, penchés sur sa tombe ouverte. Mais en retour, on peut dire que si la mort l'a arrachée prématurément à la vie à cause de l'exigence de la beauté, c'est en soumettant sa vie à cette exigence, en la lui sacrifiant, qu'elle aura pu la faire exister dans le monde, pour les autres sous la forme de la musique. On peut méditer un instant cette sorte de leçon quand on sait que, quelques années après, le réalisateur de ce film, Krzysztof Kieslowski, mourra lui aussi d'une crise cardiaque pour s'être épuisé à réaliser la trilogie *Trois couleurs : bleu, blanc, rouge*.

La vie de Véronique (l'attente de la beauté)

Synopsis

Véronique est française, elle habite Clermont-Ferrand où elle enseigne la musique dans une école primaire. Parallèlement elle suit des cours de chant chez un vieux professeur, peut-être dans l'espoir d'en faire son métier parce qu'elle s'y révèle très douée. Sans doute, si elle suivait cette voie, pourrait-elle devenir soliste. Elle se promène dans la ville en voiture et rend fréquemment visite à son père, qui habite à la campagne dans une belle maison pleine de livres. Ce père, qui est parfumeur, aime à occuper ses heures perdues au bricolage et à la réparation de vieux objets. On apprend qu'il est veuf et que Véronique a perdu sa mère très jeune. C'est lui alors qui s'était occupé de l'orpheline, qui l'avait prise par la main, comme il le lui confie, pour la conduire vers son avenir. Mais Véronique n'est plus une petite fille ; elle est dans cette période de post-adolescence où l'on est en recherche de soi-même, de la forme que prendra sa vie. Elle erre un peu dans sa vie affective, passant d'un homme à l'autre sans éprouver de sentiments forts et se sent surtout très perdue. Elle est prête à faire un faux témoignage dans un procès pour aider une amie, renonce brutalement à ses cours de chant et fait, peu après, la rencontre d'un marionnettiste venu présenter son spectacle aux enfants de l'école où elle enseigne. Elle est incompréhensiblement émue par ce spectacle, s'intéresse du coup au marionnettiste, découvre qu'il écrit des livres pour enfants et croit tomber amoureuse de lui bien qu'elle ne le connaisse pas. Commence alors un curieux jeu de piste sentimental. Alessandro Fabbri, le marionnettiste, envoie toute une série d'indices à Véronique qui ont pour effet de la conduire jusqu'à un rendez-vous, dans un café, gare Saint Lazare. Là, le marionnettiste apprend à Véronique que ce qu'elle avait pris pour une élégante déclaration d'amour n'était qu'un test pour vérifier une hypothèse psychologique dont il voudrait faire l'argument principal d'un roman qu'il projette d'écrire. Horriblement déçue, Véronique s'enfuit et va se réfugier dans un hôtel où le marionnettiste parvient tout de même, après une course-poursuite dans les rues de la ville, à la rejoindre. Il se confond en excuses et consent à reconnaître qu'il aime. Ils s'endorment l'un et l'autre, comme s'ils étaient enfin arrivés tous les deux à destination, qu'ils pouvaient enfin se sentir confiants dans la vie qui les attend. A leur réveil, Véronique “déballe son sac” au sens propre devant Alessandro, puisqu'elle en extrait les objets qui lui permettront de la connaître. Elle y découvre une balle de plastique semblable à celle que possédait Weronika et surtout une planche contact de photos en noir et blanc prises lors de son voyage à Cracovie. Alessandro reconnaît Weronika, qu'il prend pour Véronique sur l'une des photos. Celle-ci est très troublée et sent une vague "excédente" d'émotion l'envahir au moment même où Alessandro l'étreint. C'est alors qu'a lieu le "recouvrement" : Véronique rejoint Weronika dans une sorte d'illumination. Une explication de ce mystère sera donnée peu après sous la forme d'un petit conte qui fera la trame du nouveau spectacle de marionnettes d'Alessandro : l'histoire de deux jeunes filles, nées le même jour mais pas au même endroit, soeurs jumelles qui pressentent l'existence l'une de l'autre sans se connaître. Le lendemain, Véronique qui rend visite à son père, arrête un instant sa voiture devant l'arbre qui se trouve à l'entrée de la propriété, baisse la vitre et pose sa main sur le bois du tronc.

Un quotidien distendu

Au moment où l'on entre dans la vie de Véronique, c'est-à-dire au moment précis où Weronika meurt, cette vie semble soudain relâcher sa tension. Alors qu'elle est en pleine étreinte avec un ancien camarade rencontré par hasard, Véronique ressent soudain un étrange chagrin et se met à pleurer. Elle expliquera son sentiment à son père un peu plus tard. A la différence de Weronika qui confiait à son père qu'elle avait *l'impression de n'être pas seule au monde,* Véronique, elle, éprouve le sentiment, au contraire, d'être abandonnée, de se retrouver seule comme elle l'avait été au moment de la mort de sa mère : *il n'y a pas très longtemps, j'ai eu une drôle d'impression... j'ai senti que je me retrouvais toute seule.* A quoi son père répond : *quelqu'un a disparu de ta vie*. Véronique et Weronika ont en commun d'avoir toutes les deux perdu jeunes leur mère et de vivre par conséquent dans ce savoir ou cette appréhension de la mort puisque dès le début, pour elles, quelqu'un a manqué. Mais c'est paradoxalement contre cette absence, aux deux sens du mot "contre", à la fois pour la combattre et en s'appuyant sur elle que les deux jeunes filles se sont tournées vers la musique où s'enferme la possibilité de la beauté. Peut-être est-ce pour cette raison qu'elles ont été particulièrement attentives à ce pressentiment d'une présence qui les habitait et dont on peut dire que ce serait alors le rôle de la musique de le dévoiler au dehors, dans le monde sensible.

Cependant si la vie de Weronika repose toute entière sur ce pressentiment qui se confond avec l'intuition de la beauté, celle de Véronique repose initialement sur le sentiment de son absence ou de sa perte. Cela se ressent dans le film de deux manières, d'abord par un relâchement de la durée, puisque la séquence consacrée à la jeune Française est deux fois plus longue que celle qui relate la vie de la jeune Polonaise. Dans la manière de filmer ensuite : le film quitte l'univers quasi onirique dans lequel semblait baigner la vie de Weronika pour se faire semblable à une sorte de documentaire sur la vie dans une ville de province, Clermont-Ferrand. Le film prenant une couleur gris-reportage, s'étire en longueur et s'éteint dans l'attente. Dans un tel monde, les rapports entre les gens deviennent banals, voire triviaux ou sordides comme ce faux-témoignage que Véronique accepte de faire à la demande d'une collègue en instance de divorce.

Véronique a donc vraisemblablement perdu tout contact avec le sentiment du vrai. A-t-elle pour autant perdu tout contact avec la beauté ? Pas exactement. Il semblerait plutôt que la beauté se soit éloignée, comme s'est éloignée la musique. Elle rompt avec le chant, elle rompt avec l'amour, elle rompt avec la vérité ou la justice, elle a le sentiment de se sentir soudain seule ou abandonnée, mais lui restent deux piliers essentiels sur lesquels sa vie se fondait jusqu'alors : son père et la musique. La musique est là ; il ne s'agit plus d'être soi-même son interprète mais, rôle second, de la désigner à l'attention des autres, de montrer le chemin qui mène à elle, elle qui est déjà un chemin. En effet, Véronique enseigne la musique aux enfants ; elle leur fait découvrir Van den Budenmayer, ce compositeur hollandais inventé par Kieslowski et auteur supposé du morceau chanté par Weronika. Ce rôle, dévolu à Véronique une fois qu'elle a renoncé au chant, apparaît clairement quand, dans les premières images de la séquence qui lui est consacrée, elle se rend à sa salle de classe en portant des clochettes. Toute sa marche est accompagnée par le tintinabuli des cloches qui balancent en tous sens. On n'est pas dans la musique ; il s'agit plutôt d'un bruit agréable, d'un ensemble de notes dispersées, qui attendent de se mettre en ordre pour devenir musique, pour devenir concert. Tout se passe comme si la beauté avait explosé et s'était éparpillée en notes, fragments, tintements que l'on perçoit encore distinctement (et même tout proches) mais sans liens, comme un ordre défait. Voilà où en est la vie de Véronique au moment où elle se sent soudain abandonnée c'est-à-dire au moment ou avec la mort de Weronika, la beauté semble avoir déserté sa vie. La beauté peut-être, mais pas le sens de la beauté. Le sens de la beauté provient du vide qu'a laissé dans l'esprit son départ, un vide marqué qualitativement par elle et qui n'est donc pas neutre, qui est très exactement l'espace laissé disponible pour son retour. C'est en se guidant sur lui, qu'elle va retrouver le chemin qui mène à sa vie, au centre de sa vie à partir de quoi tout se réordonne. Ce centre, c'est Weronika ; le chemin qui conduit à elle : la musique, qui suppose que l'on n'ait pas perdu le sens de la justesse. Véronique avec sa classe a constitué un petit orchestre qui étudie la partition du morceau de Van den Budenmayer. La première fois qu'elle fait répéter les enfants, elle ne prête pas beaucoup attention à ce qu'ils jouent. Sa pensée est ailleurs. Elle regarde dans la cour la camionnette du marionnettiste. Mais pour nous, les spectateurs, qui écoutons, c'est comme une sorte de message qui nous est adressé à travers cette exécution imparfaite et, pourrait-on dire, à travers le fait même de son imperfection : la beauté est en train de se reconstituer, l'harmonie en train de renaître, d'autant plus audible ou saisissable que justement elle est saisie à travers la distance, le tangage maladroit du jeu des enfants. La seconde fois, en revanche, Véronique est beaucoup plus attentive et ne supporte plus les fausses notes. La moindre dissonance est aussitôt ressentie par elle comme une insulte à la beauté et elle fait bientôt arrêter la répétition. Tout se passe comme si elle s'était rapprochée de la beauté, qu'elle en était même désormais toute proche et que, du coup, avec celle-ci, qui semble avoir surgi du quotidien où elle s'était perdue, renaissait une menace qui pèse sur sa vie, une menace obscure, qu'elle ne parvient pas bien encore à saisir ou à comprendre.

L'appel

Ce qui va mettre Véronique en mouvement vers la beauté, c'est sa rencontre avec le marionnettiste. Ou, pour être plus exact, avec l'art ou le monde du marionnettiste. La rencontre avec l'homme lui-même, dans un premier temps, ne produit aucun effet, aucun "coup de foudre". Il porte de grosses lunettes qui lui donnent un air hébété et il l'indispose plutôt qu'autre chose puisqu'il occupe sa salle de cours. En revanche, elle va être étrangement séduite par son spectacle ; c'est comme si lui était dévoilée, dans la lumière de l'art, la vérité secrète de sa vie. Sans qu'on le sache déjà, c'est l'histoire de la double vie de Véronique qui nous est montrée dans ce premier spectacle : histoire d'une danseuse, qui comme Weronika lorsqu'elle chante, meurt en dansant, puis est recueillie par une vieille femme qui veillait auprès d'elle et s'enferme avec elle dans un même sac, une même chrysalide d'où la jeune fille ressort "papillon ailé". A partir du moment où Véronique assiste à ce spectacle, elle renoue avec le fil de son histoire. Mais elle ne le sait pas. Elle est émue plus que de raison et attribue son émotion à la personnalité du marionnettiste. Elle le regarde à travers un miroir, lorsqu'il manipule ses marionnettes, et c'est comme s'il dormait, comme si son spectacle était l'expression au dehors de son rêve. C'est pourquoi c'est de lui qu'elle va s'éprendre. Comme elle l'avouera à son père, elle est tombée amoureuse mais ne sait pas de qui. Ce qui pourrait être une belle expression pour évoquer l'émotion esthétique ? (Catherine Pozzi, le disait ainsi dans l'un de ses rares poèmes : *je ne sais pas de qui je suis l'amour* [3]).

Ce qui met Véronique en mouvement, ce qui, littéralement "l'émeut", c'est par conséquent un sentiment confus, une sorte d'erreur dans la mesure où elle attribue à l'amour ce qui revient en fait à la beauté. Mais sans doute les deux sentiments sont-ils liés, comme l'avait si bien compris Dante, l'auteur du poème mis en musique par Van den Budenmayer et que chante Weronika le soir du concert où elle meurt[4].

Aveuglée par cette confusion, Véronique consent à la sorte de jeu de piste sentimental que lui fait jouer le marionnettiste. Il lui envoie par la poste toute une série d'indices dont la clé est à retrouver dans les livres pour enfants qu'il a écrits. Ces indices – respiration, musique de Van den Budenmayer, lacet, boîte de cigares, cassette audio – forment un chemin qui doit conduire Véronique jusqu'à un rendez vous dans un café, gare Saint-Lazare. Là, le marionnettiste l'attend et aussi l'inévitable déception par quoi commence leur histoire véritable puisque très cyniquement il lui apprend qu'elle n'a été que la cobaye d'une sorte d'expérience romanesque.

On peut néanmoins lire cette intrigue à un double niveau, d'abord sentimental ou amoureux, ensuite existentiel ou métaphysique. Sans doute le marionnettiste fait-il "le malin" et cette explication n'est-elle qu'un masque pour ne pas avoir à avouer ou à s'avouer qu'il est amoureux, pris par le sentiment lui-même. Mais il n'empêche que la désillusion est terrible pour Véronique qui s'enfuit et se retrouve alors au point de départ, redécouvrant, dans sa course dans les rues de Paris, ce qu'est le monde sans l'amour qui l'éclaire et sans la beauté de la musique qui le "creuse" ("La musique creuse le ciel" disait Baudelaire). Cacophonie insupportable du bruit des voitures, vision grise et opaque, où, au premier plan, l'homme qu'elle croyait aimer et qui s'est révélé en définitive si médiocre, se mouche bruyamment dans un grand mouchoir pas très propre.

Il n'empêche, il faut que cette déception ait lieu, qui produit un décillement du regard sur soi et sur le monde, pour que la rencontre véritable ait lieu à son tour : la rencontre avec le marionnettiste désarmé qui, une fois son jeu abattu, laisse voir clairement son sentiment, et, surtout, la rencontre avec Weronika qui l'attendait derrière. Cette seconde rencontre, la rencon-

(3) Catherine Pozzi, "Nyx" dans *Très haut amour*, Poésie/Gallimard.
(4) Dante, Le Purgatoire, "chant 2", in *La Divine comédie*.

tre avec la jeune Polonaise, autorise une seconde lecture possible de l'épisode du jeu de piste. Il apparaît en effet que si le marionnettiste, ainsi d'ailleurs que le laisse supposer son métier, se définit lui-même comme un manipulateur, s'il se sert de son art et de son écriture pour appâter Véronique, il s'avère, en définitive, du moins c'est ce qu'il semble, qu'il est lui-même utilisé par Weronika pour donner rendez-vous à Véronique dans la chambre d'un hôtel parisien. Tout se passe comme s'il était chargé par elle de remettre la vie de Véronique à l'endroit ainsi que le suggère cette scène où Alessandro fait remarquer à Véronique qu'elle est en train d'allumer sa cigarette par le filtre. Weronika, elle, se chargera plutôt d'en réparer la brisure, comme l'avait fait autrefois son père après la mort de sa mère. On peut relire la suite des indices que le marionnettiste envoie à Véronique à travers le regard de Weronika. Ils ont alors tous un deuxième sens. Le premier spectacle, d'abord, dont l'intrigue n'a de sens qu'en fonction de son histoire, qui est même très exactement l'histoire de sa mort – histoire que Véronique ignore encore mais qu'elle devine sous la forme d'un pressentiment. La musique de Van den Budenmayer ensuite, que le marionnettiste fait écouter à Véronique au téléphone – musique qui a envahi la dernière période de la vie de Weronika au point de la saisir toute entière et de la conduire vers son achèvement. Véronique ne le sait pas, mais en écoutant cette musique, elle voit une intense couleur rouge, comme celle que l'on voit lorsque l'on ferme les yeux dans le soleil, couleur d'une vie portée à incandescence. Et à la lisière de cette vision rouge, apparaît fugitivement le visage de Weronika, tel qu'il a été aperçu à Cracovie et qu'il s'est logé dans l'inconscient de Véronique. Du lacet, Véronique fait à son insu une figure du destin de Weronika en le lâchant d'un coup après l'avoir tendu au-dessus de son électrocardiogramme. La cassette enfin conduit, sans que son auteur s'en aperçoive, à travers un jeu de piste sonore au bruit d'une violente explosion, accompagnée de bris de verre et de la sirène d'une voiture de pompier. On apprendra plus tard que c'est une voiture qui a pris feu non loin de la gare. Mais dans l'espace sonore qui ne fait qu'un avec l'espace intérieur, cette explosion indique clairement à Véronique le terme du parcours de signes et par conséquent la destination de son voyage : l'explosion intérieure, telle que l'a connue Weronika dans l'expérience de la beauté musicale qui lui a coûté la vie.

Le recouvrement

En somme il semble bien qu'à travers la présence d'Alessandro, le marionnettiste, ce soit Weronika qui appelle Véronique à elle, et derrière Weronika elle-même, quelque chose de très mystérieux vers quoi elle est allée la première, pour s'y brûler. Ce mystère l'habitait et c'est pour aller jusqu'à lui et le rendre visible qu'elle a consenti à donner sa vie. Mais dans le film, beaucoup plus que par la mort de Weronika, ce mystère s'exprime par ce que l'on pourrait appeler le "recouvrement" des deux jeunes filles. C'est en effet dans le double événement de la jouissance physique et de la réminiscence qu'il se manifeste. En même temps que Véronique trouve l'amour, elle retrouve sa soeur perdue, se retrouve elle-même ainsi que le mouvement qui l'a portée à vivre. La jouissance amoureuse, au tout début de ce qui nous a été présenté de la vie de Véronique, était montrée comme une intense lumière (Véronique allumait une ampoule juste devant la caméra au moment du plaisir). Elle coïncidait avec un incompréhensible chagrin, comme s'il avait été causé par la perte d'un être infiniment proche et cher. La jouissance physique au moment des retrouvailles n'apparaît plus qu'à travers le visage de Véronique, lui aussi, comme s'il s'illuminait, tout proche de la photo en noir et blanc de Weronika telle qu'elle est apparue sur la place de Cracovie. Mais c'est dans une autre scène, celle de l'écoute du morceau de Van den Budenmayer par Véronique, lors d'un appel téléphonique du marionnettiste, que nous est réellement montrée la réalité de l'événement intérieur : une grande vision rouge bordée par l'image en noir et blanc du visage de Weronika, signalant le triple accès à la beauté, à la vérité intime et à ce mouvement profond qui soustend les deux existences parallèles des jeunes filles. On apprendra ensuite, lorsque le marionnettiste racontera leur histoire que les deux Véronique sont nées un même jour, le 23 novembre et c'est comme si on assistait de nouveau à leur naissance commune dans cette scène du recouvrement. Le choix de cette date, en outre, n'est pas anodin puisque c'est dans la nuit du 23 au 24 novembre, on le sait, que Blaise Pascal a eu cette fameuse illumination – "FEU, joie, joie, pleurs de joie" – par laquelle s'est manifestée à lui, dans l'expérience intérieure, la présence divine et dont il a conservé toute sa vie la trace sous la forme d'un parchemin roulé dans la doublure de son pourpoint. Or à Clermont-Ferrand, c'est précisément rue Blaise Pascal que Véronique a son appartement.

Une fois que la rencontre amoureuse avec le marionnettiste a réellement eu lieu et qu'elle a permis le recouvrement des deux jeunes filles, Véronique peut habiter dans le monde de Weronika. Il est reconnaissable à la lumière verte, cette étrange lumière d'aquarium qui baigne désormais l'appartement du marionnettiste comme elle a baigné la fin de la vie de Weronika. C'est là, dans cette lumière, que Véronique comprend, grâce à un petit conte d'Alessandro la nature du lien mystérieux qui la lie à Weronika. Elle découvre alors le sens de ce pressentiment qu'elle éprouve depuis le commencement de son existence : ce sentiment d'être constamment accompagnée par une présence bénéfique et mystérieuse comme si elle était prise dans une sorte de gémellité spirituelle. On peut l'interpréter comme une manifestation du sentiment religieux : le sentiment de n'être pas seul au cœur de sa solitude et de sa difficulté à vivre, d'être accompagné à l'intérieur par une puissance protectrice et bienveillante qui nous dépasse et nous englobe ; mais n'est-ce pas, au fond, plutôt, puisque rien dans le film en dehors de la discrète allusion à Pascal, n'autorise une lecture de ce type, le sentiment qu'on éprouve confusément devant le surgissement de la beauté dans toute grande œuvre d'art ? Et ne serait-ce pas précisément l'un des sens de la beauté que de manifester par l'émotion esthétique cette ouverture des grandes œuvres, qui, en brisant la clôture de notre moi où nous nous isolons avec nos inquiétudes, se révèlent capables de nous accueillir dans leur monde, de nous soutenir dans notre vie et de nous offrir la chance sans cesse renouvelée d'une étrange sorte de consolation qui agit au plus intime de nous même. Consolation apportée, en dehors de toute détermination idéologique ou religieuse, par un inconnu et pourtant tout proche de nous au point qu'on pourrait le croire notre frère ainsi que Swann, le personnage de Proust, le pensait de Vinteuil, le musicien qui a composé la sonate qui l'émeut tant : *la pensée de Swann se porta pour la première fois dans un élan de pitié et de tendresse vers ce Vinteuil, vers ce frère inconnu et sublime qui lui aussi avait dû tant souffrir ; qu'avait pu être sa vie ? au fond de quelle douleur avait-il puisé cette force de dieu, cette puissance illimitée de créer ?* [5].

La vie de Véronique (les révélations de la beauté)

Le sens de l'art

Cette confrontation entre Weronika et le marionnettiste, dans le rapport que l'un et l'autre entretiennent avec Véronique, nous fait comprendre peu à peu combien leurs façons d'envisager l'art, ou leurs rapports à la beauté, diffèrent. Pour le marionnettiste, l'art serait une technique de manipulation mentale, de l'ordre de la séduction ; il s'agirait au moyen de la beauté de faire croire à une illusion, de la faire passer pour la réalité et d'emmener ainsi le spectateur vers un autre monde, le monde de la fiction, entièrement fabriqué (il s'appelle Fabbri). On part d'une hypothèse de construction et on tente de l'appliquer à la réalité, de remodeler la réalité en fonction de cette hypothèse ou de ce projet. Ainsi formule-t-il l'hypothèse qu'une femme peut croire un instant à la magie des contes d'enfant, à l'irruption d'un ordre, l'ordre non déterminé de la beauté, dans sa vie et que cette irruption suffirait à la mettre en mouvement d'une manière décisive, à accepter l'idée qu'un rendez-vous avec un inconnu pourrait changer sa vie. Toute différente, voire même opposée est la conception que se fait Weronika. Pour elle, la beauté n'est pas dans l'invention, dans une hypothèse fictive qu'il faudrait vérifier dans l'expérience ; elle est dans la réalité. Elle est comme une sorte d'appel lancé du fond d'une vie singulière, dans l'invisible, donc dans ce qui échappe à notre maîtrise, et qui demande, pour qu'on l'entende, qu'on lui offre son temps, son corps et son talent. La beauté est cette réalité mystérieuse, qui, profitant de la sensibilité de l'artiste (autrement dit, son aptitude à la percevoir), peu à peu se fait jour dans sa vie et y advient complètement en l'illuminant toute. De là elle rayonne, moins créée que communiquée, et atteint la vie des autres qu'elle illumine également ou colore, à l'image de ce sachet de thé qu'on voit infuser dans l'eau à travers un verre transparent. Beauté à extraire du réel, par conséquent, à révéler et non pas à projeter sur lui, à découvrir et non à inventer.

Le travail du réalisateur de cinéma, ici de Kieslowski, se trouverait peut-être à égale distance de ces deux conceptions. C'est ce qu'il nous montre dans ce dédoublement du sens des signes inventés par le marionnettiste. Si l'oeuvre d'art est bien inventée, c'est pour agir à la manière d'un signe. Elle n'est pas la beauté, qui est dans le réel, elle fait signe vers elle, comme la parole de l'oracle selon Héraclite ou le doigt qui indique ; elle la désigne à qui en a besoin dans sa vie pour survivre à toutes ces morts qui se mettent en travers du chemin des vivants. Ainsi un film comme *La double vie de Véronique* peut jouer ce rôle de signe avant coureur, d'éclaireur dans l'existence de ses spectateurs, leur donner l'occasion de s'ouvrir par la sensibilité à ce que comporte de mystère, de franges obscures toute vie individuelle, là où elle se mêle aux autres, à ce qui a déjà eu lieu et a disparu ou à ce qui n'a pas encore eu lieu et n'est donc pas advenu. Son *scénario*, reconnaît Kieslowski, *a été particulièrement difficile car il traite de choses que l'on ne peut nommer, et qui, si on les nomme, paraissent banales et stupides. Il traite de la sensibilité, des pressentiments,*

(5) **Marcel Proust, *Un amour de Swann*, p.210-212 Gallimard, Folio.**

d'une sphère fragile dans la vie des hommes[6]. L'œuvre d'art fait signe vers la beauté, promesse de recentrement. Une telle pratique de l'art donne peut-être aussi accès, comme l'évoque la figure du père dans ce film, à cette région de l'être où ces vies, ces bribes de vie se nouent et où elles peuvent trouver l'élan en se nouant pour renaître, quelque chose comme une origine. Elle confirmerait ainsi l'hypothèse de Nietzsche quand celui-ci s'interrogeait sur le sens de l'art : "l'instinct le plus profond de l'artiste va-t-il à l'art ou bien n'est-ce pas plutôt au sens de l'art, à la vie, à un désir de vie ?[7] " Un désir de vie, qui se confond avec la vie – le désir que la vie a d'elle-même. Et lorsqu'il se manifeste à l'individu singulier, il le fait sous la forme d'une intense émotion qui n'est autre que l'expérience de la beauté. Ce serait peut-être même à cela qu'on le reconnaîtrait. Ajoutons qu'il importe qu'elle échappe à toute sorte de définition, idéologique, symbolique ou religieuse, précisément parce qu'elle est non pas une idée mais une expérience et que ce n'est qu'ainsi, en tant qu'elle est vécue, qu'elle peut agir sur une vie singulière pour parfois la transformer toute entière.

La beauté, "pure preuve de l'être" (Rainer Maria Rilke)

Le père de Weronika est vraisemblablement un architecte. Il dessine des façades de maison ou d'église et fournit ainsi une sorte de plan, le plan d'un lieu merveilleux où il faudrait vivre. C'est sans doute à Cracovie, ou dans ses environs immédiats mais c'est surtout un lieu intérieur, qui figure sous la forme d'un tableau dans la chambre de Weronika ou d'une image dans le rêve de Véronique. Le père de Véronique, lui, est un homme enfoncé dans la vie des sens. Il fabrique des parfums, est très adroit de ses mains, bricole à ses heures perdues et aime notamment réparer les objets brisés, comme cette chaise, que Véronique ne peut s'empêcher de toucher. De la même façon, il a réparé la vie de Véronique, brisée par le deuil de sa mère lorsqu'elle était toute petite. Ces deux pères, dans leur rapport au réel, se complètent et n'en forment plus qu'un : l'un installe des structures dans l'esprit, met en place cet ordre nécessaire à l'intérieur pour que la vie s'organise et s'unifie ; l'autre, davantage sensible à la réalité concrète du monde, nous relie à lui, donne l'exemple, fournit les instruments pour entrer dans la vie réelle, y découvrir les traces éparses de la beauté qui nous la font aimer. L'un offre la substance, l'autre la structure ; les deux se retrouvent sans doute réunis dans cette belle image finale de l'arbre, un tilleul, dont Véronique sent la poussée sous sa main. Elle vient de rencontrer Weronika en rencontrant Alessandro. Elle veut en annoncer la nouvelle à son père. Elle ne l'a pas encore fait. Elle a arrêté sa voiture à l'entrée de la propriété, a ouvert la vitre et passé son bras à travers la portière. Elle est en train de sortir du deuil, de l'enfermement dans la coquille du moi et de ses préoccupations, de naître à elle même et à la vie intégrale. Elle était perdue et c'est comme si on lui donnait des nouvelles d'elle-même. Elle sent, en même temps que sa vie qui naît à l'intérieur, la poussée de l'arbre au dehors, comme elle avait admiré, enfant, les nervures de ses feuilles au printemps.

Ce n'est qu'alors, une fois qu'elle est entrée en contact avec l'arbre, qu'elle peut entendre intégralement le chœur de Van den Budenmayer, celui qui avait provoqué la mort de Weronika, à cause de la formidable puissance de sa poussée. Jusqu'ici elle n'en avait entendu que des bribes, au moment où elle s'était sentie soudain très seule, après la mort de Weronika et lorsque Alessandro lui en avait fait entendre un morceau au téléphone. Ou alors, elle en avait entendu la mélodie comme de loin, jouée par l'orchestre maladroit des enfants de sa classe de musique. Si elle peut l'écouter désormais intégralement, c'est grâce à l'intervention de Weronika dans sa vie, qui a pris le relais des deux pères : elle l'a protégée contre la menace que représentait pour elle l'attrait pour la beauté et conduite très progressivement jusque là afin qu'elle trouve dans l'amour l'expression complète d'elle-même. L'expérience de la beauté qui est celle de Véronique dans ce plan final du film n'est pas cette explosion destructrice qui avait été celle de Weronika dans la musique et dont elle avait été avertie par l'explosion de la voiture près de la gare Saint-Lazare. Elle est tout le contraire d'une désintégration : explosion "lignifiée", contenue et contrôlée, conférant forme et unité, conjuguant la substance vivante du bois et l'élan au ralenti de l'arbre, "beauté convulsive" "explosante-fixe" aurait dit Breton. L'arbre que Véronique touche et voit, la musique qu'elle entend selon la logique sensible des "correspondances", sont, dans leur coïncidence, la preuve que Véronique a atteint son centre, ce lieu où dans la vie intérieure le dedans et le dehors communiquent, le visible et l'invisible, le monde et le moi. La beauté, "pure preuve de l'être" selon l'expression de Rilke, n'est plus, grâce à Weronika, "le commencement de terrible" ; ayant traversé la menace de la désintégration, elle est bien plutôt une attestation de la vie contre ce qui la nie, la manifestation dans l'expérience sensible de tout ce qui nous pousse à exister contre le néant.

(6) Kieslowski, Dialogues.
(7) Nietzsche, *Crépuscule des idoles*, "Divagations d'un inactuel" n°24.

La vie belle

Qu'est-ce qu'une "belle vie" ? A cette question, Homère apporte une double réponse dans *L'Iliade* à travers le personnage d'Achille. Il y a deux sortes de vie désirables, celle que l'on peut peut-être appeler "la belle vie" au sens où on l'entend aujourd'hui dans l'expression familière "c'est la belle vie" (la dolce vita) et celle que, par contraste, l'on pourrait appeler "la vie belle". La première consiste à vivre longtemps et heureux, mais sans gloire ; à profiter dans la plus grande durée possible du simple plaisir d'être en vie. La seconde consiste à vivre une vie brève mais intense et auréolée de gloire, de sorte que la splendeur de cette vie puisse survivre dans la mémoire des hommes sous la forme d'une histoire. *Zeus nous a fait une mauvaise destinée, afin que plus tard, nous soyons un sujet de poème pour les hommes à venir*, confie Hélène à Hector. La beauté de la vie – d'une vie susceptible de se muer en histoire ou de donner lieu à une "belle biographie" – se paie au prix fort par le malheur et Achille fera comprendre à Ulysse, lors de son passage dans les Enfers, que ce prix est bien trop élevé. D'une certaine manière la vie de Weronika serait une vie belle. Sa vie est belle d'avoir été fragile. Il fallait sans doute qu'elle meure pour que sa vie s'accomplisse en destin et donne ainsi matière à une histoire. Mais c'est aussi à l'instant où elle se brise, c'est-à-dire qu'elle manifeste sa limite, qu'elle libère l'illimité qu'elle renfermait et nous le donne à voir, ou plutôt à entendre.

Pourtant, Kieslovski nous montre par son film qu'à l'époque contemporaine cette séparation entre les deux formes de vie n'est plus tout à fait valable. La vie de Véronique, une vie qui s'annonce longue et heureuse, éclairée en amont par la vie de Weronika, brève et tragique, devient sujet, elle aussi, sinon de poème, du moins de film, de poème filmique. C'est la vie ordinaire, la vie que mènent la plupart, au quotidien, avec ses longueurs et sa banalité, mais illuminée à l'intérieur par la beauté. La vie inquiète ou hésitante trouve en elle la solution qui la répare, l'élan ou l'énergie qui la relance et le socle mobile qui la soutient. Non pas sous la forme d'une leçon ou d'une idée accessible à la seule intelligence, mais sous cette espèce sensible, vivante, adaptée à l'intégralité de l'expérience, qui est celle de la beauté.

La beauté en effet, lorsqu'à la faveur de l'émotion esthétique elle s'introduit dans la vie individuelle, y apparaît à la fois comme une réponse et une exigence. Elle nous appelle à devenir ce que l'on est en nous laissant guider par le mouvement qui nous a portés à naître et qui n'est autre que la façon que la vie a de se désirer elle-même à travers nous et de se relancer ainsi. Exigence d'intime transformation, elle apparaît à celui qui dans sa vie hésitait ou s'égarait comme une sorte de réponse apportée par la vie elle-même, indiquant une direction. C'est de cette façon qu'elle répond au désarroi de Véronique lorsqu'elle pressent que Weronika est morte – pressentiment qui sans doute réveille le sentiment éprouvé par elle enfant lors du décès de sa mère. Elle répond également à l'inquiétude de Weronika, qui elle aussi avait perdu sa mère enfant et qui est bouleversée quand sa tante, la sœur de sa mère, lui apprend au téléphone qu'elle est malade et qu'elle pourrait peut-être mourir bientôt. C'est pour cette raison qu'elle se précipite à Cracovie et y rencontre la beauté sous la forme musicale d'un chœur d'hommes. A la différence de Véronique, Weronika veut participer à cette beauté non seulement en vivant, mais en l'exprimant, par le chant, dans l'art de la musique qui est le sien. Et la réponse est tellement violente, tellement "excédente" qu'elle l'emporte dans la mort. La beauté enfin apporte également sans doute une réponse au réalisateur, Krzysztof Kieslowski, puisque lui aussi, comme les deux jeunes filles, a été orphelin très jeune, orphelin non de mère mais de père. Si l'on est attentif à cet aspect biographique, l'on découvre en effet que c'est peut-être autant, sinon plus, une affirmation de la présence paternelle qui est célébrée dans ce film qu'une résurrection de la présence maternelle, même si le personnage de Weronika joue bien sûr ce rôle auprès de Véronique. C'est bien au père que ce film conduit depuis ce moment, où introduite par hasard dans une répétition de chant, Weronika a entendu ce puissant choeur d'hommes, quelque chose comme un choeur de pères, au-dessus de quoi elle va interpréter en tant que soliste sa partition singulière. On sait que ce chant sera interrompu par sa mort prématurée mais qu'il trouvera son achèvement dans l'ultime image du film où, dans la puissance jaillissante de l'arbre, se confondent les présences des deux pères. La beauté qui emprunte aux figures paternelles et maternelles son visage, apparaît essentiellement comme réponse : en elle se manifeste une présence mystérieuse – un sol, un fondement – qui perdure par-delà les césures d'une existence, la soutient et la relance et ne peut se désigner par aucun nom si ce n'est, peut-être, un nom propre.

Conclusion

Si elle se définit classiquement par la perfection d'une présence, d'une intention d'être s'accomplissant totalement dans sa manifestation sensible ou son existence[8], l'on peut dire que la beauté, telle qu'elle est présentée dans *La Double vie de Véronique*, est ce qui atteste l'accomplissement d'un individu devenu par sa vie entièrement ce qu'il est ou ce qu'il a secrètement été appelé à être depuis le fond de son existence. C'est ainsi que pour Weronika l'accomplissement, qui passe par l'expression de soi dans l'art, est rapide et violent selon le modèle de "la vie brève". Pour Véronique, en revanche, il est plus lent, se déploie dans toute la durée d'une vie que l'on pressent longue et heureuse, selon le mouvement intime de l'amour. Mais si elle a pu ainsi trouver la voie de son accomplissement, c'est parce que sa vie abritait à son insu la vie de Weronika comme son centre obscur, ou plutôt comme l'un de ses possibles réalisés, son possible le plus haut, le plus inaccessible. Le rôle de la beauté – et notamment de la beauté née de l'art, ou montrée par l'art – dans notre vie, pourrait être dès lors de nous donner sous la forme d'une "solution ex-cédente", comme l'écrivait Breton, une preuve tangible de l'accomplissement possible de nous-mêmes dans le temps qu'il nous est donné de vivre. Et peut-être est-ce ceci qu'offre en définitive la beauté, son don si rare et si précieux : la connaissance, par l'expérience ou l'analogie, d'une possibilité de nous-mêmes accomplie – et par conséquent une confiance dans ce qui va nous arriver, la croyance que l'on peut un jour parvenir à être complètement ce qu'on est, à *devenir ce que nous sommes*, pour reprendre la célèbre formule de Nietzsche. Ici, c'est sous l'espèce de la musique qu'elle joue ce rôle. *Toute musique accomplie n'est-elle pas une autre espèce de temps insinuée à l'intérieur du temps dénombrable, ou une transformation de celui-ci en une mesure plus haute, plus parfaite, et donc l'indication d'un accomplissement possible, d'où notre émotion à son écoute ?* demandait Philippe Jaccottet[9]. On le voit, une telle définition de la beauté n'exclut pas la finitude, elle l'intègre avec la possibilité de l'échec ou de la mort prématurée, mais en nous invitant à la dépasser, à ne pas nous complaire dans la fascination qu'elle ne manque pas d'exercer sur nous.

J-M. S.

(8) "La couleur juste de chaque chose vous émeut comme une harmonie, on a envie de pleurer de voir que les roses sont roses ou, si c'est l'hiver, de voir sur la tronc des arbres de belles couleurs vertes presque réfléchissantes, et si un peu de lumière vient toucher ces couleurs, comme par exemple au coucher du soleil où le lilas blanc fait chanter sa blancheur, on se sent inondé de beauté". Marcel Proust, *Contre Sainte-Beuve*, p.194, Gallimard

(9) Philippe Jaccottet, La Semaison, Gallimard, p. 86

Corrigés des épreuves d'anglais CCIP 2008

Laura Killian
Professeur agrégé d'anglais en classes préparatoires, lycée Janson de Sailly (Paris)

Alain Nowak
*Professeur de Chaire Supérieure d'anglais, lycée Fabert (Metz)
et de Première Supérieure, lycée Georges de la Tour (Metz)*

Auteurs de "L'expression écrite en anglais en classes préparatoires" (Killian - Nowak) et de "Le thème d'anglais en classes préparatoires" (Casies - Nowak), Nathan

LV 2

Version : traduction d'anglais en français

Remarques liminaires

Ce dialogue qui fait fuguer les fantasmes d'une dame concernant l'ascendance et l'ego de son chien et les remarques empathiques de son interlocuteur est une délicieuse scène de genre. Comme toujours lorsqu'il s'agit de reconstruire à l'écrit de l'expression orale, il faudra veiller à trouver une certaine fluidité, un rythme juste. L'humour exige également de choisir les mots et la syntaxe avec le plus grand soin pour essayer de ne pas le dérégler.

Les problèmes lexicaux éventuels ne sont pas très nombreux : il faudra veiller à ne pas calquer *"local"*, se débrouiller avec ses souvenirs de latinistes pour élucider le sens de *"placate"*, faire rendre gorge au contexte et avoir un peu d'imagination pour proposer une traduction de *"stalk about"*. *"Patronize"* évoquera peut-être des souvenirs : *"a patronizing tone"* (un ton condescendant), ou *"a patron of the arts"* (un mécène), ce qui n'est d'aucun secours ; le faux-sens est presque inévitable si l'on ne connait pas *"patrons"* (la clientèle).

Traduction d'anglais en français

«Well, Mr Herriot,» she frowned and gazed at me solemn-faced, «I told you many years ago ... that Tricki is descended from a long line of Chinese emperors.»
«Yes, yes, of course.»
«Well, I think I can explain the whole problem if I start at the beginning.» (...)
«When the restaurant first opened», she went on, «there was a surprising amount of resentment among some of the local people. They criticized the food and the very nice little Chinese man and his wife, and put it about that there was no place for such a restaurant in Darrowby and that it should not be patronized. Now it so happened that when Tricki and I were out on our little walks, he overheard these remarks in the street, and he was furious.»
«Really?»
«Yes, quite affronted. I can tell when he feels like this. He stalks about with an insulted expression and it is so difficult to placate him.»
«Dear me, I'm sorry.»
«And, after all, one can fully understand how he felt when he heard his own people being denigrated.» «Quite, quite, absolutely - only natural.»
«However ... the clever darling suggested the cure himself.
«He did?»
«Yes, he told me that we ourselves should start to frequent the restaurant and sample their food.»
Note: Tricki is the name of a dog.

James Herriot,
Favorite Dog Stories, St Martin's Press, New York, 1995.

Suggestion de corrigé

"Eh bien, M. Herriot, fit elle en fronçant les sourcils et en me fixant d'un air solennel, je vous ai dit il y a bien des années... que Trikki est issu d'une longue lignée d'empereurs chinois.

– Mais oui, naturellement.

–Eh bien, il me semble pouvoir expliquer tout le problème si je commence par le commencement. [...]

A l'ouverture du restaurant / Lorsque le restaurant à ouvert ses portes, tout au début, continua-t-elle, certains, dans le quartier, ont été saisis d'une animosité surprenante. Ils ont critiqué / critiquaient les plats et ont dit / disaient du mal du petit monsieur chinois très gentil ainsi que de son épouse, et ont fait courir le bruit qu'à Darrowby, ce genre de restaurant n'avait pas sa place, et que l'on ne devrait pas le fréquenter. Or donc, voilà que Trikki, alors que nous étions tous deux de sortie pour faire notre petit tour / petite balade /, a surpris ces remarques échangées dans la rue et s'est mis dans une colère noire.

– Vraiment ?

– Oui, il était absolument furax / absolument scandalisé. Je vois bien / Cela ne m'échappe pas , quand il est en proie à ce genre d'émotion. Il marche d'un pas raide en arborant un air outragé / indigné et pour le calmer, c'est toute une histoire / ce n'est pas simple du tout.

– Doux Jésus ! Vous m'en voyez navré.

– Et, après tout, l'on peut tout à fait comprendre ce qu'il a ressenti lorsqu'il a entendu dénigrer les siens.

– Tout à fait. Absolument. C'est tout naturel.

– Quoi qu'il en soit... cette petite créature adorable et futée a trouvé elle-même le remède / Ce cher petit futé a trouvé lui-même le remède.

– Ah bon ?

– Oui, il m'a confié que nous-mêmes devrions nous mettre à fréquenter ce restaurant et à goûter à leurs plats."

Thème : traduction de français en anglais

Traduction de français en anglais

Pendant des dizaines de siècles, il y a eu une forte pression sur les couples afin qu'ils restent ensemble pour élever les enfants qu'ils avaient faits. Il convenait que chacun des membres du couple tourne le dos à ses aspirations afin de rester unis pour élever les enfants. Mais aujourd'hui, comme le théâtral « Je me suis sacrifié(e) pour vous » semble démodé, beaucoup de parents se sont reportés sur une version plus tendance, « J'ai renoncé à mes plus chers désirs pour toi. Pour que tu sois heureux. Épanoui. Pour que tu aies une bonne éducation. Pour que tu puisses faire des études plus tard ». Le refrain change, l'hypocrisie est la même. Ceux qui n'ont pas d'enfants s'étonnent parfois de tant de sacrifices consentis pour des rejetons qui n'ont rien demandé, et se voient répondre : « Tu ne peux pas comprendre, tu n'as pas d'enfants. »

Corinne Maier,
No Kid, éditions Michalon, 2007

Analyse liminaire

L'opposition "Pendant des années..." / "Mais aujourd'hui..." marque nettement la **rupture** entre la situation actuelle et celle qui prévalait jusque là, qui est d'ailleurs décrite à l'imparfait dès la deuxième phrase.

L'expression du but ("afin de rester...") pose problème dans de nombreuses copies : il faut garder à l'esprit que l'on sort du réel, et que l'anglais a souvent recours à un modal pour le signifier : *"so (that) they may/might... in order that they may, might..."*.

Attention aux constructions verbales prépositionnelles (tourner le dos à, renoncer à, résister à, douter de...) qui deviennent transitives directes en anglais *(to renounce sth, resist sth, doubt sth...).*

Attention aussi, sur le plan lexical, aux collocations qui émaillent le texte : faire des études, consentir des sacrifices, changer de refrain…

Suggestion de corrigé

For thousands of years, there was / had been Ø huge / enormous pressure / great pressure // pressure was placed on couples (for them) to stay / stick together to raise / rear / bring up the children they had had. // ... so (that) they would stay... // in order that they (should) stay... Each spouse / mate / partner was ... his or her... // Both partners were (supposed / expected) to... // It was understood that both would set their ambitions aside / give up their ambitions in order / so as to remain united and bring up the children / their offspring. But today, the histrionic / theatrical / dramatic (declaration / accusation), "I (have) made sacrifices / sacrificed everything // given up everything for you / for your sake" (now) sounds out-of-date / outmoded / dated, and *(l'effet cumul remplace le lien logique 'comme')* many parents have fallen back on / taken up / turned to a more fashionable / trendier one / way to put it: "I gave up my heart's desire / my dearest dreams / my most cherished hopes for you, so that you would / could be happy and fulfilled. So that you would be well brought-up / well raised / well-bred. So that you could go on to university / continue your studies / pursue higher education / get an education / go to college / university later on. The refrain / chorus has changed / is changing / the words have changed, but / only the hypocrisy / hypocritical tune remains the same / it is the same (old) hypocrisy. Those who have no children / have not got / have not had

Langue vivante 2
Anglais

(any) children / Those without children / The childless sometimes express their astonishment that / give voice to their surprise that / wonder out loud why so many sacrifices were / have been willingly / deliberately made for kids / brats / rug rats who had / have asked for nothing / had not asked for anything, and hear (in response) / get by way of / as an answer, "You wouldn't understand—you haven't got (any) kids."

Expression écrite

Lire soigneusement le texte ci-dessous

During Mitt Romney's four years as governor of Massachusetts, his religious beliefs never once became an issue. For anyone who had been concerned that a Mormon elected to high office would somehow misuse his position for theological reasons, Romney's gubernatorial record offered strong evidence that there was nothing to worry about.

But prejudice about- other people's religions doesn't yield easily to empirical proof, and Romney's campaign for president has had to contend from the outset with a handicap faced by no other candidate: More than 25 percent of Americans say they would not vote for a Mormon.

«I'm amazed by how many people I know who won't vote for Mitt Romney because of his Mormonism,» e-mails a friend of mine, a conservative Southern Christian. «My wife, for instance. She says, 'Anybody willing to believe things as crazy as the things Mormons believe, I can't trust his judgment.' I pointed out to her that we believe that a man was raised from the dead, that he comes to us every week under the guise of bread and wine, and that we eat him up. 'That's different,' she said.»

It remains to be seen whether Romney's much-anticipated speech in Texas on Thursday on religion and politics can allay the qualms of voters like my friend's wife. Clearly Romney will not follow the example of John F. Kennedy, who dealt with the «Catholic issue» in 1960 by saying in essence that if elected president, he would leave his religious views outside the Oval Office. Romney is too devoted to his faith to minimize it in that way.

But the former governor might want to quote JFK's warning about the risk of imposing an unofficial religious test on office-seekers. «While this year it may be a Catholic against whom the finger of suspicion is pointed,» Kennedy said, «in other years it has been, and may someday be again, a Jew - or a Quaker - or a Unitarian - or a Baptist... Today I may be the victim - but tomorrow it may be you.»

It was on Sunday that the Romney campaign announced the forthcoming speech, saying the candidate would discuss how his «own faith would inform his presidency if he were elected.»

On the same day in Britain, as it happened, the BBC broadcast an interview with former Prime Minister Tony Blair, who said that his Christian faith had been «hugely important» to him during his 10 years in power - but that he had felt constrained to keep it a secret for fear of being thought a crackpot.

«It's difficult to talk about religious faith in our political system,» Blair said. «If you are in the American political system... you can talk about religious faith and people say, 'Yes, that's fair enough,' and it is something they respond to quite naturally. You talk about it in our system and, frankly, people do think you're a nutter.»

Apparently that was more than Blair was willing to risk. The fear of being thought ridiculous was why his press secretary had snapped, «We don't do God,» when an American reporter asked the prime minister about his religious views in 2003. It was why Blair's advisers vehemently protested, when he wanted to end a televised speech on the eve of the Iraq war with the words «God bless you.» American presidents routinely invoke God's blessing on the nation, but Blair's spinmasters warned him against annoying «people who don't want chaplains pushing stuff down their throats.» [...]

By American standards, it is inconceivable that a British prime minister should feel unable to acknowledge taking Christianity seriously without causing himself political damage. More than an ocean separates the United States from its mother country. Here, where any establishment of religion is barred by the Constitution, religious faiths flourish, and every presidential candidate is a self-identified believer. Across the pond, where a form of Christianity has been the established religion for centuries, the church has become a hollow shell, and a politician cannot «do God» without being scorned for his irrationality.

Mitt Romney knows that his speech isn't going to win over every voter who is uneasy at the prospect of a Mormon in the White House. Some anti-Mormon prejudice is too entrenched to be dislodged by reason. But the very fact that Romney can give such a speech and have it draw such close and respectful attention is an indication of America's exceptional nature.

By Jeff Jacoby, *The Boston Globe* December 5, 2007

Répondre en ANGLAIS aux questions suivantes (environ 200 mots pour chaque réponse)

1- What paradoxes does the author point out concerning the link between religion and politics in the US and the UK? *Answer the question in your own words.*

2- According to you, why is there such a special connection between religion and politics in the US?

Question 1

Analysis

The question is straightforward enough: although the word paradox is not used in the text, it fits neatly in with the line of thinking developed by the journalist. What will have to be done, then, is locate the various paradoxes, organise them, and write a crystal-clear presentation.

▲ Everything will have to come from the text (anything in the shape of personal comments is strictly out of order here), but it **must be rephrased,** which means mustering synonyms and using your English, not cutting and pasting from the article.

A fairly simple and effective way of organising the answer here is probably to point out that there are embedded paradoxes: global ones in the contrasted approaches to religion and politics in the UK and in the US, and local ones in the attitudes developed on each side of the Atlantic.

Language tips

Structures concessives: No matter how important religion may be, it must be kept personal

De peur de... : Mr Blair did not voice his religious beliefs, for fear of being ridiculed / vilified (calomnié) / of making a fool of himself / of being made the laughing stock of British politicians (être la risée de...) / lest people should laugh at him.

Loin de...: The British approach to religion is a far cry from what is commonly accepted in the US.

Prejudices are rampant (sont endémiques, sévissent) / entrenched (enracinés).

Religion is a bone of contention (une pomme de discorde).

Suggested answer

In both Britain and America, the relations between religion and politics can be analysed as something of a paradox.

In America, for instance, references to God are routinely made in politics and a politician's faith usually goes unquestioned even if it influences his decisions. For all that, the presidential race turns out to be fraught with prejudices as soon as the candidate is not a mainstream protestant. Although Kennedy, a Catholic, eventually made it to the White House, no amount of reasoning will, apparently, convince a large number of people to vote for Mr Romney, who is a Mormon.

In Britain, on the other hand, God has all but vanished from the scene, and a professed indifference to religion has become a secular dogma, so much so that the Prime Minister – in this case, Tony Blair – could not have voiced his religious commitment, however much it actually influenced his policies, without incurring withering attacks on his intellectual sanity.

This cultural gap is the greatest paradox of all, considering that it is in the country with an established Church that religion has been rooted out of politics, while it is still highly thought of in the USA, where no such thing as an established Church is allowed.

[206 words]

Question 2

Analysis

This question certainly invites the candidate to trot out all the old chestnuts about the founding myths of Puritan and Pilgrim forebears who fled religious oppression in the old world to found a 'City upon the Hill', and rousing slogans such as 'In God we trust' and 'one Nation, under God' (though the latter two date from the McCarthy era). The danger here is that a candidate may be sorely tempted to continue in this vein, writing an essay on the importance of religion to national identity and losing sight of the second key term of the question—politics. Though the importance of religious faith to national identity is an element to be taken into account, the question requires an analysis of the role that such an identity has played and continues to play in the political arena.

Language tips

enshrined in/by law: *garanti par la loi*
to tap into sth: *exploiter*
to cast a vote: *voter*
to scorn: *mépriser*
to yoke sth to sth: *unir* (yoke = *joug*)
to pave the way for: *ouvrir la voie à*
to be eager to do sth: *désirer vivement*
little wonder: *il n'est pas surprenant*
the downtrodden: *les opprimés*

Useful expressions and cultural references:

the evangelical vote / values voters: *l'éléctorat évangéliste*
a born-again Christian : *un évangéliste*
bible-thumping preachers / fire and brimstone sermons (brimstone = *soufre*)
pro-choice and pro-life activists

Cultural references

City upon a hill is a phrase that is associated with John Winthrop's sermon "A Model of Christian Charity," given in 1630. The phrase is derived from the metaphor of Salt and Light in the Sermon on the Mount of Jesus given in the Gospel of Matthew. Verse fourteen of Matthew chapter five states that "you are the light of the world. A city that is set on a hill cannot be hidden." Winthrop warned the Puritan colonists of New England who were to found the Massachusetts Bay Colony that their new community would be a "city upon a hill," watched by the world. Winthrop believed that all nations had a covenant with God, and that because

England had violated its religious covenant, the Puritans must leave the country. This was an expression of the Puritan belief that the Church of England had fallen from grace by accepting Catholic rituals. John Winthrop claimed that the Puritans forged a new, special agreement with God, like that between God and the people of Israel. Winthrop believed that by purifying Christianity in the New World, his followers would serve as an example to the Old World for building a model Protestant community.

The Bible Belt: an informal term for an area of the United States of America in which socially conservative Evangelical Protestantism is a dominant part of the culture. Much of the Bible Belt consists of the Southern United States. The region is usually contrasted with mainstream Protestants and Catholics of the northeast, the religiously diverse Midwest and Great Lakes, the Mormon Corridor in Utah and southern Idaho, the Catholic-dominated "Rosary Belt" of south Texas-Louisiana-Florida and the relatively secular western United States. Although exact boundaries do not exist, it is generally considered to cover much of the area stretching from Texas in the southwest, north to most of Missouri, northeast to Virginia, and southeast to northern Florida. The earliest known usage of the term "Bible Belt" was by American journalist and social commentator H.L. Mencken, who in 1924 wrote in the Chicago Daily Tribune: "The old game, I suspect, is beginning to play out in the Bible Belt."

Roe v Wade, 410 U.S. 113 (1973) is a controversial United States Supreme Court case that resulted in a landmark decision regarding abortion. According to the Roe decision, most laws against abortion in the United States violated a constitutional right to privacy under the Due Process Clause of the Fourteenth Amendment. The decision overturned all state and federal laws outlawing or restricting abortion that were inconsistent with its holdings. Overturning this landmark Supreme Court ruling is the centerpiece of evangelicals' political agenda.

The silent majority: an unspecified large majority of people in a country or group who do not express their opinions publicly. The term was popularized by the U.S. President Richard Nixon in a November 3, 1969 speech, where it referred to those Americans who did not join in the large demonstrations against the Vietnam War at the time, who did not join in the counterculture, and who did not enthusiastically participate in public discourse or the media. Nixon along with many others saw this group as being overshadowed by the more vocal minority.

The Moral Majority: Moral Majority was an organization made up of conservative Christian political action committees which campaigned on issues its personnel believed were important to maintaining its Christian conception of moral law, a conception they believed represented the opinions of the majority of Americans (hence the movement's name). With a membership of millions, the Moral Majority was one of the largest conservative lobby groups in the United States. During the 1980 presidential election, the Moral Majority is credited with giving Ronald Reagan two-thirds of the white evangelical vote, over Jimmy Carter.

The culture wars: The culture war (or culture wars) in American usage is a metaphor used to claim that political conflict is based on sets of conflicting values. The term frequently implies a conflict between values considered traditional or conservative and those considered progressive or liberal.

[Adapted from Wikipedia]

Suggested answer

The religious freedom enshrined in the US constitution has never meant that religion was not to inform public life. On the contrary, socio-political movements throughout American history, such as temperance, abolition and women's suffrage, have drawn moral authority from religion and the founding myth of god-fearing Pilgrim forefathers. Citizens who pledge allegiance to 'one nation, under God' expect politicians to acknowledge the central role that faith continues to play for the vast majority.

This historical connection between religion, national identity and politics persists in the so-called culture wars. It was Nixon who called on a 'silent majority' to cast their votes against godless hedonists who scorned country and family. But it was Reagan who effectively forged a political alliance between socially conservative evangelicals and traditional Republicans, utterly reversing the previous century's trend. God had abandoned social progressives to side with the wealthy: school prayer, deregulation, abortion bans and corporate tax cuts now figure on the same political agenda.

Yet the Democrats too are reaping the benefits of historically faith-informed political movements. As the birthplace of Civil Rights, the Black church paved the way for Obama's candidacy—little wonder that his rhetoric and vision remind us of Reverend King's. Moreover, Obama himself has eagerly reclaimed faith for the Democratic platform. God looks set to side with the downtrodden once again.

[220 words]

L. K.

Mathématiques
Voies S et E

Corrigés des épreuves du concours HEC 2008

Jean Mallet
Professeur en classes préparatoires, lycée Montaigne (Paris)

Michel Miternique
Professeur en classes préparatoires, lycée Jean-Baptiste Corot (Savigny sur Orge) et IPESUP (Paris)

Voie scientifique

BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n et p désignent deux entiers vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tA$. Lorsqu'une matrice A est inversible, on note A^{-1} son inverse.
Dans tout le problème, on identifie les deux espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$) et $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur (point) de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) avec le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$).
On munit $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) de sa structure euclidienne canonique, et pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), on note $\langle u, v\rangle = {}^tuv$ leur produit scalaire, et $||u||$ la norme de u associée.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note f_i une fonction définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs réelles, et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles, par : $F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)]^2$.

Autrement dit, si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est un point de $\mathbb{R}^p$, on a : $F(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2(X) = \frac{1}{2}||f(X)||^2$, en notant $f(X)$ le vecteur $(f_1(X), \ldots, f_n(X))$.

Le problème a pour objet l'étude de quelques aspects mathématiques liés à la recherche du minimum de la fonction F.

Partie I. Gradient et hessienne

Pour tout point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on rappelle que :

- le *gradient* de F au point X, noté $\nabla F(X)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ suivant :

$$\nabla F(X) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(X), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_p}(X)\right)$$

Mathématiques

- la *matrice hessienne* de F au point X, notée $\nabla^2 F(X)$, est la matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivante :

$$\nabla^2 F(X) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j}(X)\right)_{1\leqslant k,j\leqslant p}$$

Pour tout point $X = (x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note $J(X)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$J(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

dans laquelle i désigne l'indice de ligne et j l'indice de colonne. On pose : $G(X) = {}^tJ(X)J(X)$.

Si X est un point de $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\nabla F(X) \neq 0$, on dit qu'un vecteur h de $\mathbb{R}^p$ est *une direction de décroissance* de F en X, si on a : $\langle \nabla F(X), h\rangle < 0$.

Dans les trois exemples suivants, on suppose que p est égal à 2.

1. *Un premier exemple.*
On considère les deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 1$, et $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 1$.

a) Justifier que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer, en tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, le gradient $\nabla F(x_1, x_2)$.

b) Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les éventuels points critiques de F, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 = 0 \\ (x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3) = 0 \end{cases}$$

c) Établir, pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, l'inégalité : $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0$. En déduire que l'unique point critique de F est $(-1/2, -1/2)$.

d) Déterminer, en tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne $\nabla^2 F(x_1, x_2)$. En déduire que F admet un minimum local en $(-1/2, -1/2)$.

e) On note pour tout point X de $\mathbb{R}^2$, $\nabla^2 f_1(X)$ et $\nabla^2 f_2(X)$ respectivement, les matrices hessiennes de f_1 et f_2 au point X. Préciser la matrice $J(X)$. Exprimer ${}^tJ(X)f(X)$ et $G(X) + \sum_{i=1}^{2} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$ en fonction de $\nabla F(X)$ et $\nabla^2 F(X)$ respectivement.

2. *Un deuxième exemple.*
Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ trois vecteurs non nuls donnés de $\mathbb{R}^n$, tels que la famille (a, b) soit libre.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_i(x_1, x_2) = a_ix_1 + b_ix_2 - c_i$.

a) Exprimer, pour tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, le gradient $\nabla F(x_1, x_2)$ à l'aide de $x_1, x_2, ||a||, ||b||, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle$ et $\langle b, c\rangle$.

b) Justifier l'inégalité : $||a||^2 \times ||b||^2 - \langle a, b\rangle^2 > 0$. En déduire que la fonction F possède un unique point critique $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.
Exprimer $\widehat{x_1}$ et $\widehat{x_2}$ en fonction de $||a||, ||b||, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle$ et $\langle b, c\rangle$.

c) Calculer, en tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne $\nabla^2 F(x_1, x_2)$; en déduire que F admet un minimum local en $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.

d) En utilisant la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$, montrer que F admet un minimum global en $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.

3. *Un troisième exemple.*
On suppose que $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont n réels donnés non tous égaux. On note $\bar{c}$ et s^2 respectivement, la moyenne arithmétique et la variance de la série statistique $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - c_i$.

a) Déterminer les points critiques de F.

b) Soit $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$ un point critique de F. Exprimer $F(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$ en fonction de s^2. Montrer, pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, l'égalité : $F(x_1, x_2) - F(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \frac{n}{2}\left(x_1 + x_2 - \bar{c}\right)^2$.

c) En déduire la nature des points critiques de F. Ce résultat était-il prévisible ?

4. *Retour au cas général.*
Soit $X = (x_1, \dots, x_p)$ un point de $\mathbb{R}^p$.

a) Exprimer $\nabla F(X)$ en fonction de ${}^tJ(X)$ et de $f(X)$.

b) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $\nabla^2 f_i(X)$ la matrice hessienne de f_i au point X.
Établir la formule : $\nabla^2 F(X) = G(X) + \sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$.

Partie II. Une approximation de F

Dans cette partie, on conserve les définitions et les notations de la partie I, et on suppose que X est un vecteur **fixé** de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\nabla F(X) \neq 0$.
Pour tout vecteur $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on pose : $\ell(h) = f(X) + J(X)h$ et $L(h) = \frac{1}{2}||\ell(h)||^2$.

1. Établir, pour tout h de $\mathbb{R}^p$, l'égalité : $L(h) = F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^th\, G(X)h$.

2. Soit P une matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
a) Justifier que P est diagonalisable.
b) On note $\theta_1, \dots, \theta_p$ les valeurs propres de P, et on pose : $\theta = \max_{1\leqslant j\leqslant p} |\theta_j|$. Montrer, pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^p$, l'inégalité suivante : $|{}^thPh| \leqslant \theta||h||^2$.

3. a) Écrire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction F au point X.
b) En déduire, à l'aide de la question 2.b, que l'on a : $\lim_{||h||\to 0} \frac{F(X+h) - L(h)}{||h||} = 0$.
Pour X fixé de $\mathbb{R}^p$, on dit que $L(h)$ est une approximation à l'ordre 2 de $F(X+h)$ lorsque $||h||$ tend vers 0.

4. On note : $G(X) = (g_{i,j}(X))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ par : $\varphi_1(h) = {}^th\nabla F(X)$ et $\varphi_2(h) = {}^thG(X)h$.
a) Montrer que pour tout j de $[\![1, p]\!]$, on a : $\frac{\partial \varphi_1}{\partial h_j}(h) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(X)$ et $\frac{\partial \varphi_2}{\partial h_j}(h) = 2\sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i$.
b) En déduire que le gradient $\nabla L(h)$ de L en h, est donné par : $\nabla L(h) = \nabla F(X) + G(X)h$.
c) Soit $\nabla^2 L(h)$ la matrice hessienne de L en h. Établir la formule : $\nabla^2 L(h) = G(X)$.

5. Soit J une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que la matrice ${}^tJJ$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
b) Montrer que lorsque la matrice ${}^tJJ$ est inversible, le rang de la matrice J est égal à p.

6. Montrer que si la fonction L admet des points critiques $\widehat{h}$, alors ceux-ci vérifient l'inéquation : $\langle \widehat{h}, \nabla F(X)\rangle \leqslant 0$.

7. On suppose que la matrice $G(X)$ est inversible.
a) Montrer que L admet un unique point critique $\widehat{h}$ donné par : $\widehat{h} = -(G(X))^{-1} \times {}^tJ(X)f(X)$.
b) Établir que $\widehat{h}$ est une direction de décroissance de F en X. En déduire que L admet un minimum local en $\widehat{h}$.

Partie III. Une décomposition d'une matrice rectangulaire

Afin de réduire les inconvénients liés à l'inversion de la matrice $G(X)$, on remplace celle-ci par la matrice $G(X) + \mu I$, où μ désigne un paramètre réel strictement positif, et I la matrice identité d'ordre p. Certains résultats d'algèbre linéaire permettent alors de substituer à l'inversion d'une matrice, le calcul plus simple d'une somme de matrices.

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice V orthogonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, un entier q tel que $1 \leqslant q \leqslant p$, et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_q > 0$, qui vérifient l'égalité : ${}^tV{}^tJJV = D$, où $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est définie par : $d_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leqslant i \leqslant q$, et $d_{i,j} = 0$ sinon. Si $q < p$, on pose : $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_p = 0$.

Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on note V_i la i-ième colonne de V.

2. a) Montrer que le rang de ${}^tJJ$ est égal à q.

b) Montrer que, pour tout i de $[\![1,q]\!]$, JV_i est un vecteur propre de la matrice $J\,{}^tJ$ associé à la valeur propre λ_i. En déduire que les matrices ${}^tJJ$ et $J\,{}^tJ$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

c) Soit $(Y_1, \dots, Y_r)$ une base du sous-espace propre de ${}^tJJ$ associée à une valeur propre λ non nulle. Montrer que la famille $(JY_1, \dots, JY_r)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) En déduire que les sous-espaces propres de ${}^tJJ$ et de $J\,{}^tJ$ associés à la même valeur propre non nulle sont de même dimension, et que le rang de $J\,{}^tJ$ est égal à q.

3. On pose, pour tout i de $[\![1,q]\!]$: $U_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} JV_i$.

a) Montrer que la famille $(U_1, \dots, U_q)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de $J\,{}^tJ$.

b) En déduire qu'il existe une base orthonormée $(U_1, \dots, U_q, U_{q+1}, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de $J\,{}^tJ$.

4. On note U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la i-ième colonne de U est la matrice-colonne U_i de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par : $s_{i,i} = \sqrt{\lambda_i}$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $s_{i,j} = 0$ sinon.

Établir l'égalité matricielle suivante : $S = {}^tUJV$. En déduire l'égalité : $J = US{}^tV$.

5. a) Montrer que la matrice $({}^tJJ + \mu I)$ est inversible.

b) On note $R = (r_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par : $r_{i,i} = \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu}$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $r_{i,j} = 0$ sinon.

Établir la formule suivante : $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = VR{}^tU$.

c) En déduire l'égalité : $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu} V_i{}^tU_i$

6. Soit X un vecteur **fixé** de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\nabla F(X) \neq 0$.

Pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^p$, on pose : $M(h) = L(h) + \dfrac{\mu}{2}||h||^2$.

a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{||h||\to 0} \frac{F(X+h) - M(h)}{||h||} = 0$.

b) Calculer, pour tout h de $\mathbb{R}^p$, le gradient $\nabla M(h)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 M(h)$ de M en h.

c) En appliquant les résultats des questions précédentes à la matrice $J(X)$, montrer que M admet un unique point critique h^*. Donner une expression de h^* qui utilise les résultats de la question 5.c.

d) Montrer que M admet un minimum local en h^*.

À partir de ce minimum local h^* de M (ou du minimum local $\widehat{h}$ de L), on pourrait utiliser une méthode algorithmique permettant, sous certaines conditions, d'approcher avec une précision donnée un minimum local de la fonction F

Exemple 1

a)

Les applications f_1 et f_2 sont des applications polynomiales définies sur $\mathbb{R}^2$, elles sont donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

$F(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(f_1^2(x_1,x_2) + f_2^2(x_1,x_2))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1(x_1,x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} f_2(x_1,x_2)\\ &= 2x_1(x_1^2 + x_2 + 1) + (x_1 + x_2^2 + 1)\\ &= 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_1(x_1,x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} f_2(x_1,x_2)\\ &= (x_1^2 + x_2 + 1) + 2x_2(x_1 + x_2^2 + 1)\\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3 + 3x_2 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla F(x_1,x_2) = (2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1, x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3 + 3x_2 + 1)}$$

b)

(x_1,x_2) est un point critique de F si et seulement si $\nabla F(x_1,x_2) = 0$

$$\begin{aligned}\nabla F(x_1,x_2) = 0 &\iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0\\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3 + 3x_2 + 1 &= 0 \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0\\ 2(x_2^3 - x_1^3) + x_1^2 - x_2^2 + 3(x_2 - x_1) &= 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0\\ (x_2 - x_1)(2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) + 3 &= 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0 \quad \textbf{(1)}\\ (x_2 - x_1)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3) &= 0 \quad \textbf{(2)}\end{cases}\end{aligned}$$

c)

Considérons $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 = 2x_1^2 + x_1(2x_2 - 1) + 2x_2^2 - x_2 + 3$ comme un trinôme en x_1. Son discriminant Δ vaut $(2x_2 - 1)^2 - 8(2x_2^2 - x_2 + 3) = -12x_2^2 + 4x_2 - 23$. Il est alors immédiat que le discriminant de ce nouveau trinôme est négatif ; ce trinôme reste strictement négatif , $\Delta < 0$, d'où $(2x_2 - 1)^2 - 8(2x_2^2 - x_2 + 3) = -12x_2^2 + 4x_2 - 23 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0$

Le trinôme $2x_1^2 + x_1(2x_2 - 1) + 2x_2^2 - x_2 + 3$ n'a pas de racines réelles ; il est donc constamment du signe du coefficient de x_1^2 :

$$\forall (x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0.$$

L'équation **(2)** donne $x_1 = x_2$ et l'équation **(1)** s'écrit alors $2x_1^3 + 3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 0$.

Etudions le polynôme P défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$P'(x) = 3(2x^2 + 2x + 1)$; $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) > 0$ car son discriminant $\delta = -4$.

On en déduit que P est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car P est continue, strictement croissante).

Conclusion : P admet une unique racine réelle ; on constate facilement que $P(-\frac{1}{2}) = 0$

Finalement l'équation $\nabla F(x_1,x_2)=0$ admet une unique solution $(x_1,x_2)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

La fonction F admet un point critique et un seul $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

d)

La fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc appliquer le théorème Schwarz.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) &= 6x_1^2+2x_2+3\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2) &= 2x_1+2x_2\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) &= 2x_1+6x_2^2+3\end{aligned}$$

On a alors $\nabla^2 F(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}6x_1^2+2x_2+3 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 2x_1+6x_2^2+3\end{pmatrix}$.

Au point critique, $\nabla^2 F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & -2\\ -2 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$

$(s^2-rt)(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=4-\frac{49}{4}=-\frac{33}{4}<0$ et $r>0$.

La fonction F admet au point $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ un minimum local

e)

- $J(X)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1 & 1\\ 1 & 2x_2\end{pmatrix}$

On remarque que ${}^tJ(X)=J(X)$.

$$\begin{aligned}{}^tJ(X)f(X) &= \begin{pmatrix}2x_1 & 1\\ 1 & 2x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(X)\\ f_2(X)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2x_1 & 1\\ 1 & 2x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^2+x_2+1\\ x_1+x_2^2+1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2x_1^3+2x_1x_2+3x_1+x_2^2+1\\ 2x_2^3+2x_1x_2+3x_2+x_1^2+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On remarque que ${}^tJ(X)f(X)=\nabla F(X)$ puiqu'on a identifié $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

- $G(X)={}^tJ(X)J(X)=\begin{pmatrix}4x_1^2+1 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 4x_2^2+1\end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(X)=2$; $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\partial x_1}$ (d'après Schwarz) $=0$; $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(X)=0$; donc

$$\boxed{\nabla^2 f_1(X)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(X)=0$; $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2\partial x_1}$ (d'après Schwarz) $=0$; $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(X)=2$; donc

$$\boxed{\nabla^2 f_1(X)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$$

-

$$\begin{aligned}G(X)+\sum_{i=1}^{2}f_i(X)\nabla^2 f_i(X) &= \begin{pmatrix}4x_1^2+1 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 4x_2^2+1\end{pmatrix}+(x_1^2+x_2+1)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\quad +(x_1+x_2^2+1)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4x_1^2+1+2x_1^2+2x_2+2 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 4x_2^2+1+2x_1+2x_2^2+2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}6x_1^2+2x_2+3 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 6x_2^2+2x_1+3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{G(X)+\sum_{i=1}^{2}f_i(X)\nabla^2 f_i(X)=\nabla^2 F(X)}$$

Exemple 2

a)

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_ix_1+b_ix_2-c_i)^2\\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= \sum_{i=1}^{n}a_i(a_ix_1+b_ix_2-c_i)=x_1\sum_{i=1}^{n}a_i^2+x_2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\\ &= ||a||^2x_1+\langle a,b\rangle x_2-\langle a,c\rangle\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= \sum_{i=1}^{n}b_i(a_ix_1+b_ix_2-c_i)=x_1\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+x_2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\\ &= \langle a,b\rangle x_1+||b||^2x_2-\langle b,c\rangle\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla F(x_1,x_2)=(||a||^2x_1+\langle a,b\rangle x_2-\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle x_1+||b||^2x_2-\langle b,c\rangle)}$$

b)

On sait, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $|\langle a,b\rangle|\leq ||a||||b||$. On sait aussi qu'il y a égalité si et seulement si les vecteurs a et b sont liés. D'après les hypothèses, les vecteurs a et b sont libres, donc l'inégalité est stricte :

$$|\langle a,b\rangle|<||a||||b||,\text{ ce qui équivaut à }\langle a,b\rangle^2<||a||^2||b||^2$$

- Le couple (x_1,x_2) est un point critique de F si et seulement si $\nabla F(x_1,x_2)=0$

$$\nabla F(x_1,x_2)=0 \iff \begin{cases}||a||^2x_1+\langle a,b\rangle x_2 = \langle a,c\rangle\\ \langle a,b\rangle x_1+||b||^2x_2 = \langle b,c\rangle \quad L_2\longleftarrow ||a||^2L_2-\langle a,b\rangle L_1\end{cases}$$

opération permise car $||a||^2\neq 0$

$$\iff \begin{cases}||a||^2x_1+\langle a,b\rangle x_2 = \langle a,c\rangle\\ (||a||^2||b||^2-\langle a,b\rangle^2)x_2 = ||a||^2\langle b,c\rangle-\langle a,b\rangle\langle a,c\rangle\end{cases}$$

D'après le point précédent, $(||a||^2||b||^2-\langle a,b\rangle^2)>0$.

Le système est de Cramer : il admet donc une unique solution notée $(\widehat{x_1},\widehat{x_2})$

- Calcul de la solution

On a tout de suite $\widehat{x_2}=\frac{||a||^2\langle b,c\rangle-\langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{||a||^2||b||^2-\langle a,b\rangle^2}$.

La première ligne du système va donner $\widehat{x_1}$

$$\begin{aligned}\widehat{x_1} &= \frac{1}{\|a\|^2}\left(\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle \frac{\|a\|^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}\right)\\ &\quad \text{opération permise car } \|a\|^2 \neq 0\\ &= \frac{1}{\|a\|^2}\frac{1}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}\left(\langle a,c\rangle\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a,c\rangle\langle a,b\rangle^2 - \|a\|^2\langle a,b\rangle\langle b,c\rangle + \langle a,b\rangle^2\langle a,c\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\|a\|^2}\frac{1}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}\left(\|a\|^2\left(\|b\|^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle\right)\right)\end{aligned}$$

D'où les résultats :

$$\boxed{\widehat{x_1} = \frac{\|b\|^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2} \text{ et } \widehat{x_2} = \frac{\|a\|^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}}$$

c)

$$\begin{aligned}\nabla^2 F(x_1,x_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\end{pmatrix}.\\ &= \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & \|b\|^2\end{pmatrix}\\ (s^2-rt)(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) &= \langle a,b\rangle^2 - \|a\|^2\|b\|^2 < 0\end{aligned}$$

$$\boxed{(s^2-rt)(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) < 0 \text{ et } r(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) > 0 : F \text{ possède en } (\widehat{x_1},\widehat{x_2}) \text{ un minimum local}}$$

d)

Considérons le vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i = (a_i x_1 + b_i x_2 - c_i)$. On constate qu'alors $F(X) = \frac{1}{2}\|Y\|^2$.

Si l'on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n\end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

on a immédiatement $AX = \begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 \\ \vdots \\ a_ix_1+b_ix_2 \\ \vdots \\ a_nx_1+b_nx_2\end{pmatrix}$

Introduisons maintenant le vecteur $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient

$$\begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 - c_1 \\ \vdots \\ a_ix_1+b_ix_2 - c_i \\ \vdots \\ a_nx_1+b_nx_2 - c_n\end{pmatrix} = AX - C.$$

$$\boxed{F(X) = \frac{1}{2}\|AX-C\|^2}$$

- La matrice A est de rang 2 puisque les vecteurs a et b sont libres. D'après le cours sur les moindres carrés, $\|AX-C\|$ sera minimale pour l'unique vecteur $\widehat{X}$ de $\mathbb{R}^2$ donné par : $\widehat{X} = ({}^tAA)^{-1} \times {}^tAC$.

Vérifions que $\widehat{X} = (\widehat{x_1},\widehat{x_2})$: cela prouvera que le minimum est global.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & \|b\|^2\end{pmatrix}$$

- Calcul de $({}^tAA)^{-1}$ (on sait que cette matrice existe car A, donc ${}^tA$ sont inversibles) . Pour cela résolvons le système : ${}^tAA\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ d'inconnues x et y.

$${}^tAA\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\|a\|^2 x + \langle a,b\rangle y &= \alpha \\ \langle a,b\rangle x + \|b\|^2 y &= \beta\end{cases}$$

On a déjà résolu ce système à la question **b)** : il suffit de changer $\langle a,c\rangle$ en α, $\langle b,c\rangle$ en β et x_1 en x, x_2 en y : les formules

$x_1 = \dfrac{\|b\|^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}$ et $x_2 = \dfrac{\|a\|^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}$ donnent

$x = \dfrac{\|b\|^2\alpha - \langle a,b\rangle\beta}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}$ et $y = \dfrac{\|a\|^2\beta - \langle a,b\rangle\alpha}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}$

Matriciellement

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix}\|b\|^2 & -\langle a,b\rangle \\ -\langle a,b\rangle & \|a\|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix}\|b\|^2 & -\langle a,b\rangle \\ -\langle a,b\rangle & \|a\|^2\end{pmatrix}$$

$${}^tAC = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle a,c\rangle \\ \langle b,c\rangle\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\widehat{X} &= \frac{1}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix}\|b\|^2 & -\langle a,b\rangle \\ -\langle a,b\rangle & \|a\|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle a,c\rangle \\ \langle b,c\rangle\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix}\|b\|^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle \\ \|a\|^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{X} = \begin{pmatrix}\widehat{x_1} \\ \widehat{x_2}\end{pmatrix} : F \text{ admet en } (\widehat{x_1},\widehat{x_2}) \text{ un minimum global}}$$

Exemple 3

a)

$$\begin{aligned}F(X) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_1+x_2-c_i)^2\\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_1+x_2-c_i) = n(x_1+x_2-\overline{c}) \quad \text{car } \overline{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_1+x_2-c_i) = n(x_1+x_2-\overline{c})\end{aligned}$$

$\nabla F(X) = (n(x_1+x_2-\overline{c}), n(x_1+x_2-\overline{c}))$

Les points critiques de F vérifient : $x_1 + x_2 = \overline{c}$

b)

Soit $(\widehat{x_1},\widehat{x_2})$ un point critique de F.

$F(\widehat{x_1},\widehat{x_2})=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\widehat{x_1}+\widehat{x_2}-c_i)^2=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i)^2$. Or par définition, $s^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i)^2$. Donc

$$\boxed{F(\widehat{x_1},\widehat{x_2})=\frac{ns^2}{2}}$$

- $$\begin{aligned}F(x_1,x_2)-F(\widehat{x_1},\widehat{x_2})&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-c_i)^2-\frac{ns^2}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-\overline{c}+\overline{c}-c_i)^2-\frac{ns^2}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-\overline{c})^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i)^2+\frac{2}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-\overline{c})(\overline{c}-c_i)-\frac{ns^2}{2}\\&=\frac{n}{2}(x_1+x_2-\overline{c})^2+\frac{ns^2}{2}+(x_1+x_2-\overline{c})\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i)-\frac{ns^2}{2}\\&=\frac{n}{2}(x_1+x_2-\overline{c})^2+(x_1+x_2-\overline{c})\underbrace{\Big(n\overline{c}-\sum_{i=1}^{n}c_i\Big)}_{=0}\end{aligned}$$

$$\boxed{F(x_1,x_2)-F(\widehat{x_1},\widehat{x_2})=\frac{n}{2}(x_1+x_2-\overline{c})^2\geq 0}$$

c)

On vient de voir que $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ F(x_1,x_2)-F(\widehat{x_1},\widehat{x_2})\geq 0$

$$\boxed{\text{Aux points critiques , } F \text{ orésente des minima globaux}}$$

Il était prévisible que F ne pouvait pas présenter de maximum globaux car $\displaystyle\lim_{x_1\to+\infty}F(x_1,x_2)=+\infty$.

Cas général

a)

Par définition, $\nabla F(X)=\Big(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(X),\dots,\dfrac{\partial F}{\partial x_p}(X))\Big)$.

$$\begin{aligned}F(X)&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f_i^2(X)\\ \forall j\in[\![1,p]\!],\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)f_j(X)\end{aligned}$$

Or $J(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(X)\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_i}{\partial x_p}(X)\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(X)\end{pmatrix}$, donc

$${}^tJ(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(X)\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}(X)\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_j}{\partial x_p}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(X)\end{pmatrix}$$

$${}^tJ(X)f(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(X)\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}(X)\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_j}{\partial x_p}(X)&\dots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(X)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(X)\\ \vdots\\ f_j(X)\\ \vdots\\ f_n(X)\end{pmatrix}$$

${}^tJ(X)f(X)$ est une colonne dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)f_j(X)$. Comme on assimile les colonnes aux listes, on peut dire que ${}^tJ(X)f(X)$ est une $n-$liste dont le $i^{\text{ème}}$ terme est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)f_j(X)$. On reconnaît le $i^{\text{ème}}$ terme de $\nabla F(X)$

$$\boxed{\nabla F(X)={}^tJ(X)f(X)}$$

b)

Par définition, $\forall X\in\mathbb{R}^p,\ \nabla^2F(X)=\left(\dfrac{\partial^2F(X)}{\partial x_k\partial x_j}\right)\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Cette matrice est symétrique d'après le théorème de Schwarz puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$. Explicitons un peu :

La $k^{\text{ème}}$ ligne de $\nabla^2F(X)$ est $\left(\dfrac{\partial^2F(X)}{\partial x_k\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial^2F(X)}{\partial x_k\partial x_j},\dots,\dfrac{\partial^2F(X)}{\partial x_k\partial x_p}\right)$

D'autre part, pour tout $j\in[\![1;p]\!]$

$\dfrac{\partial F(X)}{\partial x_j}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}f_i(X)$, donc $\forall (k,j)\in(\ [\![1;p]\!]\ )^2$,

$$\frac{\partial^2F(X)}{\partial x_k\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_k\partial x_j}f_i(X)\qquad\textbf{(1)}$$

- $\forall i\in[\![1;n]\!],\ \nabla^2f_i(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2f_i(X)}{\partial x_1^2}&\dots&\dots&\dfrac{\partial^2f_i(X)}{\partial x_1\partial x_p}\\ \vdots&&&\vdots\\ \vdots&&&\vdots\\ \dfrac{\partial^2f_i(X)}{\partial x_p\partial x_1}&\dots&\dots&\dfrac{\partial^2f_i(X)}{\partial x_p^2}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$\forall (k,j)\in(\ [\![1;p]\!]\ )^2,\ \dfrac{\partial^2F(X)}{\partial x_k\partial x_j}$ est le terme général de $\nabla^2F(X)$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_k}$ est le terme général de ${}^tJ(X)J(X)$

$\dfrac{\partial^2f_i(X)}{\partial x_k\partial x_j}f_i(X)$ est le terme général de $f_i(X)\nabla^2f_i(X)$, donc, d'après l'égalité **(1)**, le terme général de $\nabla^2(F(X)$ est égal au terme général de ${}^tJ(X)J(X)$ + la somme, pour $i \in [\![1;n]\!]$, du terme général de $f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \nabla^2(F(X) = {}^tJ(X)J(X) + \sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X) = G(X) + \sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X)}$$

Partie II

1)

$$\begin{aligned} L(h) &= \frac{1}{2}||l(h)||^2 = \frac{1}{2}{}^tl(h)l(h) \\ &= \frac{1}{2}{}^t(f(X)+J(X)h)(f(X)+J(X)h) \\ &= \frac{1}{2}({}^tf(X)+{}^th{}^tJ(X))(f(X)+J(X)h) \\ &= \frac{1}{2}({}^tf(X)f(X)+{}^tf(X)J(X)h+{}^th{}^tJ(X)f(X)+{}^th{}^tJ(X)J(X)h) \\ &= \frac{1}{2}(||f(X)||^2+{}^tf(X)J(X)h+{}^th{}^tJ(X)f(X)+{}^thG(X)h) \end{aligned}$$

$J(X) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, donc $J(X)h \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$f(X) = (f_i(X), \ldots, f_n(X)) \in \mathbb{R}^n$ que l'on assimile à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; il en résulte que ${}^tf(X)J(X)h \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, donc ${}^tf(X)J(X)h \in \mathbb{R}$.

Même raisonnement pour ${}^th{}^tJ(X)f(X)$. Donc ${}^th{}^tJ(X)f(X) = {}^t\Big({}^th{}^tJ(X)f(X)\Big) = {}^tf(X)J(X)h$

Il en résulte que $L(h) = \frac{1}{2}(||f(X)||^2 + 2{}^th{}^tJ(X)f(X) + {}^thG(X)h)$

D'après I–4–b), ${}^tJ(X)f(X) = \nabla F(X)$ et on sait que $\frac{1}{2}||f(X)||^2 = F(X)$, donc

$$\boxed{\begin{aligned} L(h) &= F(X) + {}^th{}^tJ(X)f(X) + \frac{1}{2}{}^thG(X)h \\ &= F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^thG(X)h \qquad \text{d'après I–4–a)} \end{aligned}}$$

2–a)

La matrice P est symétrique réelle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, elle est donc diagonalisable en base orthonormée.

2–b)

Il existe donc une matrice orthogonale Q appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale D appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $P = QDQ^{-1} = QD{}^tQ$ (puisque Q est orthogonale).

${}^thPh = {}^thQD{}^tQh = {}^t({}^tQh)D{}^tQh$.

Posons $Y = {}^tQh$; Y appartient à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On peut écrire $Y = (y_1, \ldots, y_p)$ en identifiant, comme le dit l'énoncé, les éléments de $\mathbb{R}^p$, les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et les matrices lignes de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

L'égalité précedente devient ${}^thPh = {}^tYDY = \sum_{k=1}^p \theta_k y_k^2$.

L'inégalité triangulaire donne $|{}^thPh| \le \sum_{k=1}^p |\theta_k| y_k^2$

Or par hypothèse $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $|\theta_k| \le \theta$. On multiplie ces inégalités par $y_k^2 \ge 0$ et on les ajoute ; il vient $\sum_{k=1}^p |\theta_k| y_k^2 \le \sum_{k=1}^p \theta y_k^2 \le \theta \sum_{k=1}^p y_k^2$, soit finalement

$$\boxed{|{}^thPh| \le \theta ||Y||^2}$$

3–a)

F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$, son développement à l'ordre 2 existe et on a $\forall h \in \mathbb{R}^p$,

$F(X+h) = F(X) + \langle \nabla F(X), h\rangle + \frac{1}{2}q_X(h) + ||h||^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ et où q_X est la forme quadratique associée à la hessienne de F au point X.

3–b)

$\langle \nabla F(X), h\rangle = {}^th\nabla F(X)$ et $q_X(h) = {}^th\nabla^2 F(X)h$.

D'après I–4–b), $q_X(h) = {}^th\Big(G(X) + \sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h$, donc

$$\begin{aligned} F(X+h) &= F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^th\Big(G(X) + \sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h + ||h||^2\varepsilon(h) \\ &= \underbrace{F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^thG(X)h}_{=L(h)} + \frac{1}{2}{}^th\Big(\sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h + ||h||^2\varepsilon(h) \end{aligned}$$

$$F(X+h) = L(h) + \frac{1}{2}{}^th\Big(\sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h + ||h||^2\varepsilon(h) \qquad \textbf{(2)}$$

Pour tout indice $i \in [\![1;n]\!]$, la matrice $f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$ est symétrique réelle à cause du théorème de Schwarz, donc la matrice $\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)$ est aussi symétrique réelle.

Posons $P = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)$; l'égalité **(2)** s'écrit

$$F(X+h) = L(h) + {}^thPh + ||h||^2\varepsilon(h)$$

$$\begin{aligned} \forall h \ne 0,\ \left|\frac{F(X+h) - L(h)}{||h||}\right| &= \left|\frac{{}^thPh + ||h||^2\varepsilon(h)}{||h||}\right| \\ &\le \frac{1}{||h||}\Big(|{}^thPh| + ||h||^2|\varepsilon(h)|\Big) \\ &\le \frac{1}{||h||}|{}^thPh| + ||h|||\varepsilon(h)| \\ &\le \frac{\theta||h||^2}{||h||} + ||h|||\varepsilon(h)| \qquad \text{d'après 2–b)} \\ &\le \theta||h|| + ||h|||\varepsilon(h)| \end{aligned}$$

$\lim_{h\to 0}(\theta||h|| + ||h|||\varepsilon(h)|) = 0$ donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(X+h) - L(h)}{||h||}\right| = 0}$$

4–a)

$\varphi_1(h) = {}^th\nabla F(X) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)$; donc $\frac{\partial \varphi_1}{\partial h_j}(h) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(X)$

$\varphi_2(h) = \sum_{i=1}^p g_{i,i}(X)h_i^2 + 2\sum_{1\le i<k\le p} g_{i,k}(X)h_ih_k$ d'après la formule classique du développement d'une forme quadratique lorsque l'on connaît sa matrice.

Soit $j \in [\![1;p]\!]$; réécrivons la deuxième somme de ce développement en faisant apparaître les termes en h_j

$$\sum_{1\le i<k\le p} g_{i,k}(X)h_ih_k = \sum_{1\le i<j\le p} g_{i,j}(X)h_ih_j + \sum_{1\le j<k\le p} g_{j,k}(X)h_jh_k + \sum_{\substack{1\le i<k\le p\\ i\neq j,k\neq j}} g_{i,k}(X)h_ih_k$$

$$\frac{\partial\varphi_2(h)}{\partial h_j} = 2g_{j,j}(X)h_j + 2\sum_{1\le i<j\le p} g_{i,j}(X)h_i + 2\sum_{1\le j<i\le p} g_{j,i}(X)h_i\ ;$$

la dernière somme vaut $2\displaystyle\sum_{1\le j<i\le p} g_{i,j}(X)h_i$ car G est symétrique, donc

$$\frac{\partial\varphi_2(h)}{\partial h_j} = 2\sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i$$

4–b)

On a $L(h) = F(X) + \varphi_1(h) + \frac{1}{2}\varphi_2(h)$; par linéarité du gradient, $\nabla L(h) = \nabla\varphi_1(h) + \frac{1}{2}\nabla\varphi_2(h)$.

Or $\nabla\varphi_1(h) = \nabla F(X)$ d'après a).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla\varphi_2(h) &= \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial h_1}(X),\dots,\frac{\partial\varphi_2}{\partial h_j}(X),\dots,\frac{\partial\varphi_2}{\partial h_p}(X)\right)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{p} g_{i,1}(X)h_i,\dots,\sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i,\dots,\sum_{i=1}^{p} g_{i,p}(X)h_i\right)\\ &= \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{p} g_{i,1}(X)h_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{p} g_{i,p}(X)h_i\end{pmatrix}\end{aligned}$$

en identifiant les lignes aux colonnes

$$\frac{1}{2}\nabla\varphi_2(h) = G(X)h$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \nabla L(h) = \nabla F(X) + G(X)h}$$

5–a)

La matrice ${}^tJJ$ est une matrice symétrique réelle appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Elle est donc diagonalisable en base orthonormée. Soit λ une valeur propre de ${}^tJJ$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

${}^tJJY = \lambda Y \Longrightarrow {}^tY{}^tJJY = \lambda{}^tYY$, ce qui s'exprime aussi ${}^t(JY)JY = \lambda{}^tYY$, ou encore $||JY||^2 = \lambda||Y||^2$

$Y \neq 0 \Longrightarrow ||Y||^2 > 0$, on a alors $\lambda = \dfrac{||JY||^2}{||Y||^2}$, donc $\boxed{\lambda \geq 0}$

5–b)

Il s'agit de montrer que $\operatorname{Ker}{}^tJJ = \{0\} \Longrightarrow \operatorname{Ker} J = \{0\}$.

Montrons d'une manière générale que $\operatorname{Ker}{}^tJJ = \operatorname{Ker} J$

- Soit $Y \in \operatorname{Ker}{}^tJJ$: $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tJJY = 0$. Cela implique ${}^tY{}^tJJY = 0$, ou encore $||JY||^2 = 0$. On a $JY = 0$, donc $Y \in \operatorname{Ker} J$.
- Soit $Y \in \operatorname{Ker} J$: $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $JY = 0$. On multiplie par ${}^tJ$ à gauche et on a ${}^tJJY = 0$: $Y \in \operatorname{Ker}{}^tJJ$.

On a bien l'égalité $\operatorname{Ker}{}^tJJ = \operatorname{Ker} J$.

$\boxed{\text{Donc si } {}^tJJ \text{ est inversible, son noyau est nul, donc celui de } J \text{ aussi et le rang de } J \text{ égal } p}$

6)

Si $\widehat{h}$ est un point critique de L, alors $\nabla L(\widehat{h}) = 0$.

D'après 4–b), on a alors : $\nabla F(X) + G(X)\widehat{h} = 0$, soit $G(X)\widehat{h} = -\nabla F(X)$; donc ${}^t\widehat{h}G(X)\widehat{h} = -{}^t\widehat{h}\nabla F(X) = -\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle$.

Ceci s'écrit aussi ${}^t\widehat{h}{}^tJJ\widehat{h} = -\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle$, et finalement $||J(X)\widehat{h}||^2 = -\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle$.

$\boxed{\text{On a immédiatement } \langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle \leq 0}$

7–a)

Si la matrice $G(X)$ est inversible, alors l'équation $G(X)\widehat{h} = -\nabla F(X)$ admet une unique solution : $\widehat{h} = -(G(X))^{-1}\nabla F(X)$. Or d'après 4–b), $\nabla F(X) = {}^tJ(X)f(X)$, donc

$$\boxed{\widehat{h} = -(G(X))^{-1} \times {}^tJ(X)f(X)}$$

7–b)

Montrons que $J(X)\widehat{h} \neq 0$ **pour avoir** $\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle < 0$

Si $J(X)\widehat{h} = 0$, alors $\widehat{h} \in \operatorname{Ker} J(X)$. Donc d'après 5–b), $\widehat{h} \in \operatorname{Ker}{}^tJ(X)J(X)$, c'est-à-dire $\widehat{h} \in \operatorname{Ker} G(X)$. Par hypothèse, $G(X)$ est inversible, donc $\operatorname{Ker} G(X) = \{0\}$. On aurait donc $\widehat{h} = 0$.

D'après 4–b), $\nabla L(0) = \nabla F(X) \neq 0$. Cela est contradictoire.

Conclusion : $J(X)\widehat{h} \neq 0$, donc $||J(X)\widehat{h}|| > 0$ et par conséquent $\langle\widehat{h},\nabla F(X) < 0\rangle = -||J(X)\widehat{h}||^2 < 0$ d'après 6).

$\boxed{\widehat{h} \text{ est une direction de décroissance de } F(X)}$

Soit Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

${}^tY\nabla^2L(\widehat{h})Y = {}^tYG(X)Y$ (d'après 4–c)), donc ${}^tY\nabla^2L(\widehat{h})Y = ||J(X)Y||^2$ (car $G(X) = {}^tJ(X)J(X)$.

Or $G(X)$ inversible implique $J(X)$ inversible et $J(X)$ inversible et $Y \neq 0$ impliquent $J(X)h \neq 0$

$\boxed{\text{Donc } \forall Y \in \mathbb{R}^p\ (Y \neq 0) \Longrightarrow ({}^tY\nabla^2L(\widehat{h})Y = ||J(X)Y||^2 > 0). \text{ C'est une condition suffisante pour que } \widehat{h} \text{ soit un minimum local d'après le développement limité à l'ordre 2.}}$

Partie III

1)

La matrice ${}^tJJ$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, orthogonale (${}^tV = V^{-1}$) telles que $D = {}^tV{}^tJJV$.

On sait que les valeurs propres de ${}^tJJ$ sont positives ou nulles (d'après II–5–a)). Rangeons ces valeurs propres dans l'ordre décroissant large, notons q la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles (il y en a car ${}^tJJ$ est **diagonalisable et non nulle**). Si $q < p$, alors $\dim\operatorname{Ker}{}^tJJ = p - q > 0$ et il y a $p - q$ zéros sur la diagonale de D. Si l'on note $\lambda_1,\dots,\lambda_q,\lambda_{q+1},\dots,\lambda_p$ les termes diagonaux de D, on peut ecrire $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&\\ &\ddots&&&&\\ &&\lambda_q&&&\\ &&&\lambda_{q+1}&&\\ &&&&\ddots&\\ &&&&&\lambda_p\end{pmatrix}$

avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_q > 0$ et $\lambda_{q+1} = \ldots = \lambda_p = 0$

2–a)

Le rang de la matrice ${}^tJJ$ est égal au rang de D puisque les deux matrices sont semblables.

$$\boxed{\operatorname{rang}({}^tJJ) = q}$$

2–b)

On sait que $\forall i \in [\![1;q]\!], V_i$ est un vecteur propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre $\lambda_i > 0$: ${}^tJJV_i = \lambda_i V_i$.

Donc $(J{}^tJ)JV_i = \lambda_i JV_i$.

Si $JV_i = 0$, alors $V_i \in \operatorname{Ker} J$, donc $V_i \in \operatorname{Ker}{}^tJJ$ d'après II–5–b) ; le vecteur V_i serait un vecteur propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre 0, **ce qui est faux.**

Donc JV_i est un vecteur propre de $J{}^tJ$ associé à la valeur propre non nulle λ_i.

Toute valeur propre non nulle de ${}^tJJ$ est une valeur propre non nulle de $J{}^tJ$. Par symétrie des rôles joués par J et ${}^tJ$, on en déduit que toute valeur propre non nulle de $J{}^tJ$ est une valeur propre non nulle de ${}^tJJ$.

$$\boxed{\text{Les matrices } J{}^tJ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tJJ \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles}}$$

2–c)

Nous supposerons que la famille $((Y_1, \ldots, Y_r)$ est une base orthogonale du sous-espace propre de ${}^tJJ$ associé à une valeur propre $\lambda > 0$, ce qui semble avoir été omis dans l'énoncé.

Soit $(Y_1, \ldots, Y_r)$ une base orthogonale de vecteurs propres du sous-espace propre de ${}^tJJ$ associé à une valeur propre $\lambda > 0$.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ / $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k JY_k = 0$. Prenons le produit scalaire de ces deux membres avec JY_i pour $i \in [\![1;r]\!]$. On obtient, après avoir utilisé la linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \langle JY_k, JY_i\rangle = 0 \quad &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{r} \alpha_k {}^t(JY_k)JY_i = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{r} \alpha_k {}^tY_k {}^tJJY_i = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \lambda {}^tY_k Y_i = 0 \quad \text{puisque } Y_i \text{ est un vecteur propre de } {}^tJJ \text{ associé à } \lambda \\
&\Longleftrightarrow \alpha_i \lambda ||Y_i||^2 = 0
\end{aligned}$$

puisque les vecteurs Y_k sont deux à deux orthogonaux.

$\lambda > 0$ et $||Y_i||^2 > 0$; l'égalité précédente implique $\alpha_i = 0$

$$\boxed{\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r \ / \ \sum_{k=1}^{r} \alpha_k JY_k = 0 \Longrightarrow \alpha_k = 0 \text{ pour tout } k \in [\![1;r]\!] : \text{la famille } (JY_k) \text{ est libre}}$$

2–d)

Soit E_λ le sous-espace propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre $\lambda > 0$ et notons r sa dimension. Soit $(V_1, \ldots, V_r) \in \Big(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\Big)^r$ une base orthogonale de E_λ.

On vient de voir que la famille $(JV_1, \ldots, JV_r) \in \Big(\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})\Big)^r$ est une famille libre de E'_λ, sous-espace propre de $J{}^tJ$ associé à $\lambda > 0$. Si l'on note r' sa dimension, on en déduit $r \leq r'$. Par la symétrie des rôles joués par ${}^tJ$ et J, on en déduit que $r' \leq r$.

Conclusion $r = r'$.

Puisque ${}^tJJ$ est diagonalisable, son image est égale à la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles. De même pour $J{}^tJ$. D'après le résultat précédent, et puisque ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres non nulles, on conclut

$$\boxed{\text{Les matrices } {}^tJJ \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ et } J{}^tJ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ ont le même rang } q}$$

3–a)

$\forall i \in [\![1;q]\!],\ \lambda_i > 0$, donc $U_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} JV_i$ existe et appartient à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in (\ [\![1;q]\!]\ )^2$.

$$\begin{aligned}
\langle U_i, U_j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\langle JV_i, JV_j\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}{}^t(JV_i)JV_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}{}^tV_i{}^tJJV_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}{}^tV_i({}^tJJ)V_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\lambda_j{}^tV_iV_j \quad \text{car } V_j \text{ est un vecteur propre de } {}^tJJ \text{ associé à } \lambda_j
\end{aligned}$$

Les vecteurs V_i et V_j sont des vecteurs colonnes de la matrice V, qui est une matrice orthogonale, donc ces deux vecteurs sont normés et orthogonaux dès que $i \neq j$. D'où le résultat :

$$\boxed{\langle U_i, U_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_j}} = 1 & \text{si } j = i \end{cases}}$$

La famille (U_k) $1 \leq k \leq q$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de $J{}^tJ$ car V_k est un vecteur propre de ${}^tJJ$, donc JV_k est un vecteur propre de $J{}^tJ$, donc U_k aussi.

3–b)

$(U_1, \ldots, U_q)$ est une famille libre (orthonormale) de q vecteurs propres de $J{}^tJ$, associés aux valeurs propres non nulles de $J{}^tJ$. Donc $\forall j \in [\![1;q]\!],\ U_j \in \operatorname{Im}(J{}^tJ)$.

La dimension de cette image est q d'après 2–c), donc $(U_1, \ldots, U_q)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} J{}^tJ$; c'est aussi une base orthonormée de la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de $J{}^tJ$.

Puisque la matrice $J{}^tJ$ est diagonalisable (en base orthonormée d'ailleurs) les sous-espaces propres sont supplémentaires. Le sous-espace propre associé à la valeur 0 est $\operatorname{Ker}(J{}^tJ)$.

$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(J{}^tJ) \bigoplus \operatorname{Ker}(J{}^tJ)$; d'ailleurs ces deux sous-espaces sont orthogonaux.
Donc si l'on prend une base orthonormée $(U_{q+1}, \ldots, U_n)$ de $\operatorname{Ker}(J{}^tJ)$, la famille $(U_1, \ldots, U_q, U_{q+1}, \ldots, U_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

4)

Soit $S' = {}^tUJV$, on remarque que $S' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ car $V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ J \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ecrivons $s'_{i,j}$ son terme général (on a $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p$).

$s'_{i,j}$ est le résultat du produit de la i ème ligne de ${}^tU$, qui est ${}^tU_i$, et de la j ème colonne de JV, qui est JV_j. Donc $\boxed{s'_{i,j} = {}^tU_iJV_j = \langle U_i, JV_j\rangle}$

- Pour $1 \leq j \leq q, s'_{i,j} = \langle U_i, \sqrt{\lambda_j}U_j\rangle$ d'après la définition des U_j , donc $s'_{i,j} = \sqrt{\lambda_j}\langle U_i, U_j\rangle$, ce qui donne

$\forall j \in [\![1;q]\!],\ s'_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $s'_{j,j} = \sqrt{\lambda_j}$ puisque U_j est normé.

- Pour $j \geq q+1$, le vecteur JV_j est nul ; en effet, V_j est un vecteur propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre 0, donc c'est un vecteur de $\operatorname{Ker}{}^tJJ$ d'après la question 1) ; d'après la question II–5–a) on sait que V_j est aussi un vecteur de $\operatorname{Ker} J$, donc $JV_j = 0$ et par conséquent $\langle U, JV_j\rangle = 0$

$$\boxed{\text{Donc } s'_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} & \text{si } i=j \text{ et } 1 \le j \le q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ On retrouve le terme général de } S : S = {}^tUJV}$$

Les matrices U et V sont orthogonales (ce sont les matrices dont les colonnes sont constituées des vecteurs de 2 bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$).

Dans le résultat précédent $S = {}^tUJV$, multiplions les deux termes par U à gauche et ${}^tV$ à droite ; il vient $U^tUJV^tV = US^tV$, soit $\boxed{J = US^tV}$ puisque $U^tU = I_n$ et $V^tV = I_p$

5−a)

Soit $\mu > 0$

${}^tJJ = {}^t(US^tV)US^tV = V^tS^tUUS^tV = V^tSS^tV$ car $U^tU = I_n$. Or la matrice V est orthogonale, donc l'égalité précédente traduit le fait que ${}^tJJ$ et ${}^tSS$ sont semblables dans un changement de bases orthonormées.

$${}^tSS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_q & & & \\ & & & \lambda_{q+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_q > 0 \text{ et } \lambda_k = 0 \text{ pour } k > q$$

$${}^tSS + \mu I_p = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_q+\mu & & & \\ & & & \lambda_{q+1}+\mu & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p+\mu \end{pmatrix}$$

$\forall i \in [\![1;p]\!],\ \lambda_i \ge 0$ et $\mu > 0$ impliquent que tous les termes diagonaux sont strictement positifs.

$$\boxed{\text{La matrice } {}^tSS + \mu I_p \text{ est inversible, donc } {}^tJJ + \mu I_p \text{ aussi puisque les deux sont semblables}}$$

5−b)

Notons $\Delta = {}^tJJ + \mu I_n$.

$$\begin{aligned} \Delta &= V({}^tSS + \mu I_p) \times {}^tV \quad \text{donc} \\ \Delta^{-1} &= V({}^tSS + \mu I_p)^{-1} \times {}^tV \quad \text{car } {}^tV = V^{-1}, \text{ donc} \\ \Delta^{-1} \times {}^tJ &= V({}^tSS + \mu I_p)^{-1} \times {}^tV{}^tJ \\ &= V({}^tSS + \mu I_p)^{-1} \times {}^tV({}^tUS^tV) \quad \text{d'après 4)} \\ &= V({}^tSS + \mu I_p)^{-1} \times {}^tVV^tS^tU \\ &= V({}^tSS + \mu I_p)^{-1} \times {}^tS^tU \quad \text{puisque } V \text{ est orthogonale} \end{aligned}$$

Pour avoir la relation demandée : $({}^tJJ + \mu I_p)^{-1} \times {}^tJ = VR^tU$ il suffit de vérifier que

$$({}^tSS + \mu I_p)^{-1} \times {}^tS = R.$$

Remarquons que cette égalité équivaut à $({}^tSS + \mu I_p)R = {}^tS$. C'est celle là que nous allons vérifier.

Notons $r_i = \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu}$ pour $1 \le i \le p$

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \ldots & & & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & r_p & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \sqrt{\lambda_p} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^tS = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & & & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & \sqrt{\lambda_p} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

$${}^tSS + \mu I_p = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_q+\mu & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_p+\mu \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_k = 0$ pour $k \ge q+1$

$$({}^tSS + \mu I_p)R = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_q+\mu & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_p+\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \ldots & & & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & r_p & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1(\lambda_1+\mu) & 0 & \ldots & & & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & r_p(\lambda_p+\mu) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & & & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & \sqrt{\lambda_p} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, les $n-p$ dernières colonnes de R sont nulles, donc celles de $({}^tSS + \mu I_p)R$ aussi et pour les p premières cela revient à faire un produit de matrices diagonales.

On retrouve bien la matrice ${}^tS$

5−c)

Gardons les notations $r_i = \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu}$ pour $1 \le i \le p$; on remarque que $r_i = 0$ pour $i > q$.

$$V = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{p,1} & \ldots & v_{p,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ ; \ R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \ldots & & & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & r_p & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \text{ et}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \ldots & u_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & \ldots & u_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ;$$

$$VR^tU = \begin{pmatrix} r_1v_{1,1} & r_2v_{1,2} & \dots & & r_pv_{1,p} & 0 & \dots & 0 \\ r_1v_{2,1} & r_2v_{2,2} & \dots & & r_pv_{2,p} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ r_1v_{p,1} & r_2v_{p,2} & & \dots & r_pv_{p,p} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{j,1} & \dots & u_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{1,i} & \dots & u_{j,i} & \dots & u_{n,i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{1,n} & \dots & u_{j,n} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

Soit $\alpha \in [\![1,p]\!]$ et $\beta \in [\![1;n]\!]$. Le terme général d'indice (α,β) de ce produit est $\boxed{\sum_{k=1}^{p} r_k v_{\alpha,k} u_{\beta,k}}.$

$$V_i{}^tU_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{\alpha,i} \\ \vdots \\ v_{p,i} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{1,i} & \dots & u_{\beta,i} & \dots & u_{n,i} \end{pmatrix}$$

Son terme d'indice (α,β) est $v_{\alpha,i}u_{\beta,i}$ Le terme général d'indice (α,β) de la somme $\sum_{i=1}^{p} r_iV_i{}^tU_i$ est

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} r_i v_{\alpha,i} u_{\beta,i}}$$

Les deux résultats encadrés sont égaux puisque les indices sont muets. De plus la somme s'arrête à q puisque $r_i = 0$ pour $i > q$.

$$\boxed{VR^tU = \sum_{i=1}^{q} r_iV_i{}^tU_i \ ; \text{donc } ({}^tJJ + \mu I_p)^{-1} \times {}^tJ = \sum_{i=1}^{q} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu} V_i{}^tU_i}$$

6–a)

$F(X+h) - M(h) = F(X+h) - L(h) - \frac{\mu}{2}||h||^2$; donc

$\forall h \neq 0,\ \dfrac{F(X+h) - M(h)}{||h||} = \dfrac{F(X+h) - L(h)}{||h||} - \dfrac{\mu ||h||}{2}$

On sait que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(X+h) - L(h)}{||h||} = 0$ d'après II–3–a) donc

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{F(X+h) - M(h)}{||h||} = 0}$$

6–b)

$$\begin{aligned} M(h) &= L(h) + \frac{\mu}{2}||h||^2 \\ &= F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^thG(X)h + \frac{\mu}{2}{}^thh \qquad \text{d'après II–1)} \\ &= F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^th(G(X) + \mu I_p)h \end{aligned}$$

D'après II–4–b) et c) on peut écrire

$\nabla M(h) = \nabla F(X) + (G(X) + \mu I_p)h = \nabla L(h) + \mu h$

$\nabla^2 M(h) = G(X) + \mu I_p = \nabla^2 L(h) + \mu I_p.$

6–c)

Les points critiques h^* de M vérifient $\nabla M(h^*) = 0$, soit $(G(X) + \mu I_p)h^* = -\nabla F(X)$ et, puisque $(G(X) + \mu I_p)$ est inversible,

$$h^* = -(G(X) + \mu I_p)^{-1}\nabla F(X) \text{ avec } \nabla F(X) = {}^tJ(X)f(X)$$

Puique $\nabla F(X) \neq 0$, on en conclut $-(G(X) + \mu I_p)^{-1}\nabla F(X) \neq 0$ (car $(G(X) + \mu I_p)$ est inversible), donc $h^* \neq 0$

> $h^* = -(G(X) + \mu I_p)^{-1}\nabla F(X)$ est non nul et c'est l'unique point critique de M
>
> D'après 5–c), $h^* = -\Big(\sum_{i=1}^{q} \dfrac{\sqrt{\lambda_i(X)}}{\lambda_i(X) + \mu} V_i(X){}^tU_i(X)\Big) f(X)$

6–d)

$$\begin{aligned} \langle h^*, \nabla F(X)\rangle &= {}^th^*\nabla F(X) \\ &= -{}^th^*(G(X) + \mu I_p)h^* \\ &= -{}^th^*G(X)h^* - \mu{}^th^*h^* \\ &= -||J(X)h^*||^2 - \mu||h^*||^2 \end{aligned}$$

car $G(X) = {}^tJ(X)J(X)$.

h^* est une direction de décroissance de F en X.

Soit $Y \in \mathbb{R}^p$, non nul.

${}^tY\nabla^2 M(h^*)Y = {}^tY(G(X) + \mu I)Y = ||J(X)Y||^2\mu + ||Y||^2 > 0$

C'est une condition suffisante pour que M admette en h^* un minimum local

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 2, on considère un nuage de n points du plan, c'est-à-dire un n-uplet $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ (resp. $y_1, y_2, \dots, y_n$) ne sont pas tous égaux.

On appelle moyenne arithmétique $\overline{x}$ et écart-type σ_x du n-uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$, les réels suivants :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}$$

On définit de même la moyenne arithmétique $\overline{y}$ et l'écart-type σ_y du n-uplet $y = (y_1, \dots, y_n)$.

La covariance $\operatorname{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $r(x, y)$ du couple (x, y) sont donnés par :

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) \quad \text{et} \quad r(x,y) = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, associe le réel $f(a, b)$ tel que :

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)^2$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2. a) Écrire le système d'équations (S) permettant de déterminer les points critiques de f.

b) Résoudre le système (S). En déduire que f admet un unique point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ que l'on exprimera en fonction de $\overline{x}, \overline{y}, \sigma_x^2$ et $\operatorname{cov}(x, y)$.

c) Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f.

d) Établir la formule suivante : $f(\hat{a}, \hat{b}) = n\sigma_y^2(1 - r^2(x, y))$

3. a) Montrer que l'on a : $|r(x, y)| \leqslant 1$.

b) Que peut-on dire du nuage de points lorsque $|r(x, y)| = 1$?

PROBLÈME

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres ;
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n + 1$;
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n + 1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n.
On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.
Les variables aléatoires $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et $E(X_n)$ désigne, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'espérance de X_n.

Partie I. Un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que l'on a : $N = 3$ *et* $p = 1/3$.
On considère les matrices S et R suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à quatre lignes est confondu avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.

2. a) Montrer que les réels $-1, 0, 5$ et 9 sont des valeurs propres de S.

b) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de la matrice S^n en fonction de n (on pose $S^0 = I$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).

3. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.

a) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 0]$.

b) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 3]$.

c) Vérifier que la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 1]$ (resp. $[X_n = 2]$) est la loi binomiale de paramètres $(2, \frac{1}{3})$ (resp. $(1, \frac{5}{9})$).

d) On note $E(X_{n+1}/X_n = i)$ l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = i]$. Déterminer les valeurs respectives de $E(X_{n+1}/X_n = 1)$ et $E(X_{n+1}/X_n = 2)$.

4. On suppose, *uniquement dans cette question*, que X_0 suit la loi binomiale de paramètres $(3, \frac{1}{3})$.

a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.

b) Vérifier la formule suivante : $E(X_1) = \sum_{i=0}^{3} E(X_1/X_0 = i) \times P([X_0 = i])$.

5. Pour tout entier naturel n, on considère le vecteur U_n de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P([X_n = 0]) \\ P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n, et t_n.

b) À l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X_n = i])_{0\leqslant i\leqslant 3}$, déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ indépendante de n, telle que : $U_{n+1} = MU_n$.

c) Exprimer M en fonction de S. En déduire les valeurs propres de M.

d) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

6. On pose : $F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0]$.

a) Que signifie l'événement F ?

b) Montrer que le virus finit par disparaître presque sûrement, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0.

Partie II. Le cas général

On suppose que pour tout entier naturel n et pour tout entier i de $[\![0, N]\!]$, on a : $P([X_n = i]) > 0$. On suppose également que pour tout couple (i, j) de $[\![0, N]\!]^2$, le réel $q_{i,j}$ défini par : $q_{i,j} = P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$, est indépendant de n.
Soit Q la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ définie par : $Q = (q_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant N}$.

1. a) Déterminer, pour tout j de $[\![0, N]\!]$, les probabilités $q_{0,j}$ et $q_{N,j}$. De même, déterminer pour tout i de $[\![0, N]\!]$, la probabilité $q_{i,N}$.

b) Justifier que si l'on a $j > N - i$, alors $q_{i,j} = 0$.

c) Montrer que pour tout i de $[\![1, N-1]\!]$, la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = i]$, est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. a) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice Q.

b) Soit λ une valeur propre de Q, et $V = \begin{pmatrix} V(0) \\ V(1) \\ \vdots \\ V(N) \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

On pose : $|V(i)| = \max_{0\leqslant j\leqslant N} |V(j)|$. Justifier que la composante $V(i)$ n'est pas nulle, puis, en examinant la ligne i du système $QV = \lambda V$, montrer que l'on a : $|\lambda| \leqslant 1$.

3. On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 0]) \\ P([X_n = 1]) \\ \vdots \\ P([X_n = N]) \end{pmatrix}$.

À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer en fonction de Q une matrice M de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ indépendante de n et vérifiant, pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $U_{n+1} = MU_n$.

On suppose jusqu'à la fin de la partie II que la matrice M est diagonalisable, et que $\mathcal{B} = (V_0, \ldots, V_N)$ est une base de vecteurs propres de M telle que, pour tout k de $[\![0, N]\!]$, le vecteur propre V_k est associé à une valeur propre λ_k.

De plus, on suppose que : $\lambda_0 = 1$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, et que pour tout k de $[\![1, N]\!]$, on a : $|\lambda_k| < 1$.

4. On décompose alors le vecteur U_0 sur la base $\mathcal{B}$: $U_0 = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k V_k$.

a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la décomposition du vecteur U_n sur la base $\mathcal{B}$.

b) On note, pour tout couple (k, i) de $[\![0, N]\!]^2$, $V_k(i)$ la $(i+1)$-ième composante du vecteur V_k. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0, N]\!]$, la probabilité de l'événement $[X_n = i]$ en fonction des réels α_k, λ_k et $V_k(i)$ $(k \in [\![0, N]\!])$.

c) Montrer que, pour tout i de $[\![1, N]\!]$, on a : $\lim_{n\to+\infty} P([X_n = i]) = 0$.

d) En déduire que le virus finit par disparaître presque sûrement, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0.

Partie III. Estimations ponctuelle et par intervalle de confiance de p

On suppose que le paramètre p, qui exprime la probabilité qu'un individu contagieux transmette le virus à un individu sain, est inconnu, et on cherche à l'estimer. On rappelle que : $q = 1 - p$.
Pour m entier supérieur ou égal à 1, on considère un m-échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose : $\overline{Y}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$.

Dans toute la suite de cette partie, on note ε un réel strictement positif quelconque.

1. a) Montrer que $\overline{Y}_m$ est un estimateur sans biais de p ; déterminer son risque quadratique.

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, montrer que l'intervalle $\left[\overline{Y}_m - \sqrt{\frac{5}{m}}, \overline{Y}_m + \sqrt{\frac{5}{m}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95.

2. Soit θ un réel positif.
a) Établir l'égalité suivante : $P([\overline{Y}_m - p \geqslant \varepsilon]) = P([e^{m\theta\overline{Y}_m} \geqslant e^{m\theta(p+\varepsilon)}])$.

b) Montrer que si T est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives d'espérance $E(T)$, et a un réel strictement positif, on a l'inégalité : $P([T \geqslant a]) \leqslant \frac{E(T)}{a}$.

c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \ln(pe^x + q)$. Déduire des questions précédentes, l'inégalité suivante : $P([\overline{Y}_m - p \geqslant \varepsilon]) \leqslant e^{m(g(\theta)-\theta(p+\varepsilon))}$.

d) Montrer que la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, l'inégalité : $|g''(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.

e) En déduire l'inégalité suivante : $g(\theta) \leqslant \theta p + \frac{\theta^2}{8}$.

f) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = \frac{x^2}{8} - \varepsilon x$.
En déduire l'inégalité : $P([\overline{Y}_m - p \geqslant \varepsilon]) \leqslant e^{-2m\varepsilon^2}$.

3. On pose : $\overline{W}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1 - Y_i)$. Établir l'inégalité : $P([\overline{W}_m - q \geqslant \varepsilon]) \leqslant e^{-2m\varepsilon^2}$.

4. a) Déduire des questions 2 f) et 3, l'inégalité suivante : $P([|\overline{Y}_m - p| \geqslant \varepsilon]) \leqslant 2e^{-2m\varepsilon^2}$.

b) Sachant que $\ln(0.025) \approx -3.688$, calculer $2e^{-2m\varepsilon^2}$ pour $\varepsilon = \sqrt{\frac{1.844}{m}}$. En déduire un nouvel intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95. Comparer cet intervalle de confiance à celui obtenu à la question 1.b. Conclure.

Exercice

1)

f est un polynôme par rapport aux variables a et b , défini sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{D'après le cours, } f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$$

2–a)

Un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si (a,b) est solution de **(S)** $= \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a,b) & = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a,b) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(ax_k+b-y_k)x_k & = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(ax_k+b-y_k) & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} bx_k - \sum_{k=1}^{n} y_kx_k & = 0 \\ a\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} b - \sum_{k=1}^{n} y_k & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \\ a\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} b & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + bn\overline{x} & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \\ na\overline{x}+nb & = n\overline{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} na\overline{x}+nb & = n\overline{y} \qquad L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ a\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + bn\overline{x} & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a\overline{x}+b & = \overline{y} \qquad L_1 \longleftarrow \frac{1}{n}L_1 \\ a\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n(\overline{x})^2\Big) & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_kx_k - n\overline{x}\times\overline{y} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - \overline{x}L_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{(S)} \iff \begin{cases} a\overline{x}+b & = \overline{y} \\ a\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-(\overline{x})^2) & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(y_kx_k - \overline{x}\times\overline{y}) \end{cases}}$$

2–b)

Remarques

(1)
$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - 2\overline{x}x_k + (\overline{x})^2) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\overline{x}\times\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n}(\overline{x})^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2n(\overline{x})^2 + n(\overline{x})^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n(\overline{x})^2\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(x_k^2 - (\overline{x})^2\Big) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(x,y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y}) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k - \overline{y}\sum_{k=1}^{n} x_k - \overline{x}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{x}\times\overline{y}\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k - n\overline{y}\times\overline{x} - n\overline{x}\times\overline{y} + n\overline{x}\times\overline{y}\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k - n\overline{x}\times\overline{y}\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_ky_k - \overline{x}\times\overline{y}) \end{aligned}$$

Dans ces conditions, $a\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-(\overline{x})^2) = \sum_{k=1}^{n}(y_kx_k - \overline{x}\times\overline{y})$ s'écrit aussi $a\sigma_x^2 = \operatorname{cov}(x,y)$. Or $\sigma_x^2 \neq 0$ sinon, d'après la définition de σ_x^2 on aurait $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = \overline{x}$, tous les x_k seraient égaux, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut diviser par σ_x^2 l'égalité précédente et on a $\boxed{a = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} = \widehat{a}}$

L'égalité $a\overline{x}+b=\overline{y}$ s'écrit $\boxed{b = \widehat{b} = \overline{y} - \widehat{a}\,\overline{x}}$

2–c)

La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on peut donc lui appliquer le Théorème de Schwarz : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a,b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial b\partial a}(a,b)$.

Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, f ne peut admettre un extremum local qu'en un point critique, donc uniquement au point $(\widehat{a},\widehat{b})$.

Utilisons les notations de Monge. Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) &= r(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2\\ \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a,b) &= s(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k = 2n\overline{x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) &= t(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 2n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s^2-rt)(a,b) &= 4n^2(\overline{x})^2 - 4n\sum_{k=1}^{n} x_k^2\\ &= 4n\Big(n(\overline{x})^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\\ &= -4n\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-\overline{x})^2\\ &= -4n^2\sigma_x^2 \quad \text{d'après la remarque (1) faite au 2–b)}\end{aligned}$$

$\sigma_x^2 \neq 0 \Longrightarrow \sigma_x^2 > 0$, donc $\boxed{f \text{ présente un extremum local en } (\widehat{a},\widehat{b})}$

Les nombres x_k n'étant pas tous égaux, l'un au moins d'entre eux n'est pas nul, donc $r(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$

$$\boxed{f \text{ présente un minimum local en } (\widehat{a},\widehat{b})}$$

2– d)

$$\begin{aligned}f(\widehat{a},\widehat{b}) &= \sum_{k=1}^{n}(\widehat{a}x_k + \overline{y} - \widehat{a}.\overline{x} - y_k)^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big((x_k-\overline{x})\widehat{a} - (y_k-\overline{y})\Big)^2\\ &= \widehat{a}^2\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2 - 2\widehat{a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y}) + \sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2\\ &= \widehat{a}^2 n\sigma_x^2 - 2\widehat{a}n\,\mathrm{cov}(x,y) + n\sigma_y^2\\ &= n\frac{(\mathrm{cov}(x,y))^2}{\sigma_x^2} - n\frac{2(\mathrm{cov}(x,y))^2}{\sigma_x^2} + n\sigma_y^2 \quad \text{d'après 2–b)}\\ &= n\Big(\sigma_y^2 - \frac{(\mathrm{cov}(x,y))^2}{\sigma_x^2}\Big)\\ &= n(\sigma_y^2 - \sigma_y^2 r^2(x,y))\end{aligned}$$

$$\boxed{f(\widehat{a},\widehat{b}) = n\sigma_y^2(1-r^2(x,y))}$$

3– a)

$f(a,b)$ est une somme de carrés, donc $f(a,b) \geq 0$. En particulier $f(\widehat{a},\widehat{b}) \geq 0$, donc $n\sigma_y^2(1-r^2(x,y)) \geq 0$.

Les y_k n'étant pas tous égaux, l'un d'entre eux au moins est différent de $\overline{y}$, donc $\sigma_y^2 \neq 0$ donc $\sigma_y^2 > 0$.

L'inégalité précédente équivaut à $1 - r^2(x,y) \geq 0$, donc $r^2(x,y) \leq 1$, donc $\boxed{|r(x,y)| \leq 1}$

3– b)

Si $|r(x,y)| = 1$, alors $f(\widehat{a},\widehat{b}) = 0$, ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\widehat{a}x_k + \widehat{b} - y_k)^2 &= 0\\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ \widehat{a}x_k + \widehat{b} - y_k &= 0\\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ y_k &= \widehat{a}x_k + \widehat{b}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les points } (x_k,y_k) \text{ sont tous sur la droite d'équation } y = \widehat{a}x + \widehat{b}}$$

Probème

Commentaire concernant la remarque $(X_i = 0) \Longrightarrow (X_{i+1} = 0)$ **:**

Cette implication a été contestée en disant : on peut avoir simultanément aucun individu contagieux le jour i et k, $(k > 0)$ individus contaminés, non contagieux ce même jour, ce qui impliquerait que $(X_{i+1} = k)$.

Ceci est faux, cette situation ne peut avoir lieu.

Explication : Si le jour $i+1$, il y a k $(k > 0)$ individus contaminés et contagieux, alors ces k individus ont été contaminés le jour i. Donc ce jour là, il doit y avoir au moins un individu contagieux, pour les contaminer, c'est-à-dire que $X_i \neq 0$.

On vient de montrer : $X_{i+1} \neq 0 \Longrightarrow X_i \neq 0$, ce qui revient à : $X_i = 0 \Longrightarrow X_{i+1} = 0$

Partie I

1)

Résolvons le système **(S)**: $R\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

$$\textbf{(S)} \iff \begin{cases} y - 6z + t &= a\\ x + 5z &= b\\ -x + z &= c\\ -y &= d\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= -d\\ x + 5z &= b\\ -x + z &= c\\ -6z + t &= a + d\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= -d\\ z &= \frac{1}{6}(b+c) \qquad L_2 \longleftarrow \frac{1}{6}(L_2+L_3)\\ x &= z - c\\ t &= a + d + 6z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{6}(b-5c)\\ y &= -d\\ z &= \frac{1}{6}(b+c)\\ t &= a+b+c+d\end{cases}$$

Ceci équivaut à l'égalité matricielle $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On en déduit } R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2–a)

Le réel λ est valeur propre de S si et seulement si le système $(S-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas de Cramer.

Ce système équivaut au système Σ suivant

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} (9-\lambda)x + 4y + 4z + 9t &= 0 \\ (4-\lambda)y + 5z &= 0 \\ y - \lambda z &= 0 \\ -\lambda t &= 0 \end{cases}$$

- **Pour $\lambda = -1$:**

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} 10x + 4y + 4z + 9t &= 0 \\ 5y + 5z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ t &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t &= 0 \\ z &= -y \qquad \text{d'après } L_2 \text{ et } L_3 \\ 10x &= 0 \qquad \text{en reportant les résultats précédents dans } L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases}$$

> Le système n'est pas de Cramer, il admet d'autres solutions que la solution $(0,0,0,0)$: $\lambda = -1$ **est valeur propre de** S.
>
> Le sous-espace propre associé est :
>
> $E_{-1} = \{(0, y, -y, 0) \in \mathbb{R}^4 \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((0, 1, -1, 0))$

- **Pour $\lambda = 0$:**

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} 9x + 4y + 4z + 9t &= 0 \\ 4y + 5z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9x + 9t &= 0 \\ y = z &= 0 \\ t &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -t \\ y = z &= 0 \\ t &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

> Le système n'est pas de Cramer: $\lambda = 0$ **est valeur propre de** S.
>
> Le sous-espace propre associé est :
>
> $E_0 = \{(-t, 0, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ t \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((-1, 0, 0, 1)) = \text{vect}((1, 0, 0, -1))$

- **Pour $\lambda = 5$:**

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} 4x + 4y + 4z + 9t &= 0 \\ -y + 5z &= 0 \\ y - 5z &= 0 \\ -5t &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t &= 0 \\ y &= 5z \\ x &= -6z \end{cases}$$

> Le système n'est pas de Cramer: $\lambda = 5$ **est valeur propre de** S.
>
> Le sous-espace propre associé est :
>
> $E_5 = \{(-6z, 5z, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((-6, 5, 1, 0))$

- **Pour $\lambda = 9$:**

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} 4y + 4z + 9t &= 0 \\ -5y + 5z &= 0 \\ y - 9z &= 0 \\ -9t &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t &= 0 \\ y &= -z \qquad \text{d'après } L_1 \\ y &= z \qquad \text{d'après } L_2 \\ y &= 9z \qquad \text{d'après } L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &\in \mathbb{R} \\ y = z &= 0 \\ t &= 0 \end{cases}$$

> Le système n'est pas de Cramer: $\lambda = 9$ **est valeur propre de** S.
>
> Le sous-espace propre associé est :
>
> $E_9 = \{(x, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 0, 0, 0))$

2–b)

Le calcul n'est pas nécessaire : supposons S associée à un endomorphisme s de $\mathbb{R}^4$ dans la base canonique B de $\mathbb{R}^4$. s admet 4 valeurs propres distinctes , donc s est diagonalisable puisque $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ (c'est une condition suffisante). On obtient une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de s en réunissant les bases de E_{-1}, E_0, E_5 et E_9 trouvées dans le **2–a)**. Une telle base est $B' = \Big((0,1,-1,0), (1,0,0,-1), (-6,5,1,0), (1,0,0,0)\Big)$; dans cette base la matrice de s est :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

La matrice de passage de la base B à la base B' est R. D'après la formule de changement de base pour les endomorphismes, on a $\boxed{D = R^{-1} S R}$

2–c)

L'égalité précédente s'écrit aussi $S = RDR^{-1}$ ce qui implique (c'est maintenant un résultat classique du cours qui peut se montrer facilement par récurrence)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S^n = RD^nR^{-1} \text{ (formule valable pour } n = 0 \text{ avec la convention } S^0 = D^0 = I)}$$

Calculons explicitement : soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6\times 5^n & 9^n \\ (-1)^n & 0 & 5^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{S^n = \begin{pmatrix} 9^n & -5^n+9^n & -5^n+9^n & 9^n \\ 0 & \frac{(-1)^n}{6}+\frac{5^{n+1}}{6} & (-1)^{n+1}\frac{5}{6}+\frac{5^{n+1}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{n+1}}{6}+\frac{5^n}{6} & (-1)^n\frac{5}{6}+\frac{5^n}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On, peut remarquer que cette formule qui donne explicitement S^n n'est pas valable pour $n=0$ puisque l'on n'obtient pas I.

3–a)

On a vu que $(X_n=0) \Longrightarrow (X_{n+1}=0)$. Donc la variable X_{n+1} conditionnée par l'événement $(X_n=0)$ ne prend que la valeur 0

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=1}$$

3–b)

Si $(X_n=3)$, les 3 individus sont contagieux le jour n, ils sont donc sains le jour suivant d'après l'énoncé. Donc la variable X_{n+1} conditionnée par l'événement $(X_n=3)$ ne prend que la valeur 0

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=0)=1}$$

3–c)

Si $X_n=1$, l'individu contagieux le jour n sera sain le jour suivant : il y aura au plus 2 contagieux le jour $(n+1)$.

<u>**Sous la condition** $(X_n=1)$</u>

- $(X_{n+1}=0)$ signifie qu'aucun des deux individus sains le jour n n'a été contaminé (ce même jour bien-sûr). Par indépendance des contaminations,

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

- $(X_{n+1}=1)$ signifie qu'un seul des deux individus, que nous nommerons A et B, sains le jour n a été contaminé.

$$\begin{aligned} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) &= P\Big((A \text{ est contaminé mais pas } B)\cup(B \text{ est contaminé mais pas } A)\Big) \\ &= P(A \text{ est contaminé mais pas } B)+P(B \text{ est contaminé mais pas } A) \\ &\quad \text{car les deux événements sont incompatibles} \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} \quad \text{par indépendance des contaminations} \end{aligned}$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{4}{9}$$

- $(X_{n+1}=2)$ signifie que les deux individus sains le jour n ont été contaminés ce même jour.

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{9}$$

On a bien

$$\begin{aligned} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) &= \binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) &= \binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) &= \binom{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La variable } (X_{n+1}\ /\ X_n=1) \text{ suit la loi binomiale } B(2;\tfrac{1}{3}) \text{ de paramètres 2 et } \tfrac{1}{3}}$$

Si $(X_n=2)$, il y aura au plus un contagieux le jour suivant. Nommons C_1 et C_2 les deux individus contagieux le jour n et C l'individu sain le jour n.

<u>**Sous la condition** $(X_n=2)$</u>

- $(X_{n+1}=0)$ signifie que (C n' a pas été contaminé par C_1) et que (C n' a pas été contaminé par C_2). Par indépendance des contaminations,

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

- $(X_{n+1}=1)$ est l'événement contraire du précédent, donc

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\frac{5}{9}$$

$$\boxed{\text{La variable } (X_{n+1}\ /\ X_n=2) \text{ suit la loi de Bernoulli } B(\tfrac{5}{9}) \text{ de paramètre } \tfrac{5}{9}}$$

3–d)

C'est du cours

$$E\Big(X_{n+1}\ /\ X_n=1\Big)=2\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$E\Big(X_{n+1}\ /\ X_n=2\Big)=1\times\frac{5}{9}=\boxed{\frac{5}{9}}$$

4–a)

$X_0(\Omega)=[\![0;3]\!]$ et $X_1(\Omega)\subset[\![0;3]\!]$

Utilisons le système complet d'événements $\{\Big(X_0=i\Big)\ /\ 0\le i\le 3\}$. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $j\in[\![0;3]\!]$, on a

$$P(X_1=j)=\sum_{i=0}^{3}P(X_0=i)P_{(X_0=i)}(X_1=j) \text{ avec } P(X_0=i)=\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27} & \text{si } i=0 \\ 3\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} & \text{si } i=1 \\ 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9} & \text{si } i=2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27} & \text{si } i=3 \end{cases},$$

car la variable X_0 suit la loi binomiale $B(3,\frac{1}{3})$.

- $$\begin{aligned} P_{(X_0=0)}(X_1=0) &= 1 && \text{d'après 3–a)} \\ P_{(X_0=1)}(X_1=0) &= \frac{4}{9} && \text{d'après 3–c)} \\ P_{(X_0=2)}(X_1=0) &= \frac{4}{9} && \text{d'après 3–c)} \\ P_{(X_0=3)}(X_1=0) &= 1 && \text{d'après 3–b)} \end{aligned}$$

Donc, $P(X_1=0)=1\times\frac{8}{27}+\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{2}{9}+1\times\frac{1}{27}=\frac{51}{81}=\boxed{\frac{17}{27}}$

- $P_{(X_0=0)}(X_1=1) = P_{(X_0=3)}(X_1=1) = 0$ d'après 3−a) et 3−b)
  $P_{(X_0=1)}(X_1=1) = 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ d'après 3−c)
  $P_{(X_0=2)}(X_1=1) = \frac{5}{9}$ d'après 3−c)

  Donc, $P(X_1=1) = \frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{5}{9} = \boxed{\frac{26}{81}}$

- $P_{(X_0=0)}(X_1=2) = P_{(X_0=3)}(X_1=2) = 0$ d'après 3−a) et 3−b)
  $P_{(X_0=1)}(X_1=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ d'après 3−c)
  $P_{(X_0=2)} = (X_1=2) = 0$ d'après 3−c)

  Donc, $P(X_1=2) = \frac{1}{9}\times\frac{4}{9} = \boxed{\frac{4}{81}}$

- Remarquons que l'on n'a jamais $P(X_{n+1}=3)$ d'après la question 3).

  Donc, $P(X_1=3) = \boxed{0}$

$$\boxed{E(X_1) = 1\times\frac{26}{81}+2\times\frac{4}{81} = \frac{34}{81}}$$

4−b)

$E(X_1 \;/\; X_0=0) = 0$; $P(X_0=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$E(X_1 \;/\; X_0=1) = \frac{2}{3}$; $P(X_0=1) = 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

$E(X_1 \;/\; X_0=2) = \frac{5}{9}$; $P(X_0=2) = 3\times\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

$E(X_1 \;/\; X_0=3) = 0$; $P(X_0=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

(On a utilisé les résultats du 3)).

$$\boxed{\sum_{i=0}^{3} E(X_1 \;/\; X_0=i)\times P(X_0=i) = \frac{2}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\times\frac{2}{9} = \frac{8}{27}+\frac{10}{81} = \frac{34}{81} = E(X_1)}$$

Remarque : Cette égalité s'appelle la formule de l'espérance totale.

5−a)

La famille $\{(X_n=i) \;/\; 0\le i\le 3\}$ est un système complet d'événements, donc $\boxed{u_n+v_n+w_n+t_n=1}$

5−b)

Il en résulte que : $\forall j\in[\![0;3]\!],\ P(X_{n+1}=j) = \sum_{i=0}^{3} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)P(X_n=i)$

$P(X_{n+1}=0) = 1\times u_n+\frac{4}{9}\times v_n+\frac{4}{9}\times w_n+1\times t_n$

$P(X_{n+1}=1) = 0\times u_n+\frac{4}{9}\times v_n+\frac{5}{9}\times w_n+0\times t_n$

$P(X_{n+1}=2) = 0\times u_n+\frac{1}{9}\times v_n+0\times w_n+0\times t_n$

$P(X_{n+1}=3) = 0,$

toujours à l'aide des résultats du 3). Matriciellement, on obtient $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\\ w_{n+1}\\ t_{n+1}\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\\ t_n\end{pmatrix}$ avec

$$\boxed{M = \begin{pmatrix}1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1\\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0\\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

5−c)

Il est alors clair que $\boxed{M = \frac{1}{9}S}$

Un réel λ est valeur propre de M si et seulement si il existe une matrice colonne X non nulle appartenant à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $MX=\lambda X$; ce qui équivaut à $SX=(9\lambda)X$, c'est-à-dire que 9λ est valeur propre de S.

$\lambda\in\mathrm{spect}(M) \iff 9\lambda\in\{-1,0,5,9\}$, donc $\boxed{\mathrm{spect}(M) = \{-\frac{1}{9},0,\frac{5}{9},1\}}$

5−d)

Par une récurrence classique que nous ne ferons pas, on montre que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ U_n = M^nU_0}$

Donc $U_n = \frac{1}{9^n}S^nU_0 = \begin{pmatrix}1 & 1-\left(\frac{5}{9}\right)^n & 1-\left(\frac{5}{9}\right)^n & 1\\ 0 & \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n+\frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n & -\frac{5}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n+\frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n & 0\\ 0 & -\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n & \frac{5}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\\ w_0\\ t_0\end{pmatrix}$

D'où

$$\begin{aligned}u_n &= u_0+(1-\left(\frac{5}{9}\right)^n)v_0+(1-\left(\frac{5}{9}\right)^n)w_0+t_0\\ &= u_0+v_0+w_0+t_0-\left(\frac{5}{9}\right)^n v_0-\left(\frac{5}{9}\right)^n w_0\end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = 1-\left(\frac{5}{9}\right)^n v_0-\left(\frac{5}{9}\right)^n w_0}$$

$$v_n = (\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n+\frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n)v_0+(-\frac{5}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n+\frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n)w_0$$

$$\boxed{v_n = \frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^n(v_0+w_0)+\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{9}\right)^n(v_0-5w_0)}$$

6−a)

$F = \bigcup_{n=0}^{+\infty}(X_n=0)$. Dire que l'événement F est réalisé c'est dire, par définition d'une réunion, qu'il existe une entier $n\in\mathbb{N}$ tel que l'événement $(X_n=0)$ est réalisé. Cela veut dire qu'il arrive un jour, le jour n, où le virus a disparu.

L'événement F est l'événement " le virus a disparu "

6−b)

On a vu que $(X_n=0)\subset(X_{n+1}=0)$ car toute éventualité qui réalise $(X_n=0)$ réalise aussi $(X_{n+1}=0)$.

F est alors l'union d'une suite d'événements, croissante pour l'inclusion. **D'après le théorème de la limite monotone,**

$P(F) = \lim_{n\to+\infty}P(X_n=0) = \lim_{n\to+\infty}u_n = 1$ car

$u_n = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n v_0 - \left(\frac{5}{9}\right)^n w_0$ et $\left|\frac{5}{9}\right| < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$

Remarque : Ce résultat ne dépend pas des valeurs $u_0, \dots, t_0$

$$\boxed{P(F) = 1 \text{ veut dire que l'on est quasiment certain que le virus va disparaître}}$$

Partie II

1–a)

- $q_{0,j} = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases}$

car si les individus sont tous sains le jour n, ils le sont encore le jour suivant.

- $q_{N,j} = P_{(X_n=N)}(X_{n+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases}$

car si les individus sont tous contagieux le jour n, ils sont sains le jour suivant.

- $q_{i,N} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = N) = 0$

car si $i > 0$ (il y a i individus contagieux le jour n), ces i individus seront sains le jour suivant : on n'aura pas $X_{n+1} = N$

Si $i = 0$, on a vu l'explication au début du a). On a $(X_n = i) \cap (X_{n+1} = N) = \emptyset$

Remarque : Ceci prouve que l'on n'a pas : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0; N]\!],\ P(X_n = i) > 0$.

L'énoncé comporte une erreur, car $P(X_{n+1} = N) = \sum_{i=0}^{N} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = N)P(X_n = i) = 0$;

le vrai énoncé doit être $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0; N[\![,\ P(X_n = i) > 0$.

1–b)

Si i individus sont contagieux le jour n, ils sont sains le jour suivant. Donc ce jour-là, numéro $n+1$, il ne peut y avoir, au plus, que $N - i$ individus contagieux.

$$\boxed{\text{Donc, si } j > N - i, \text{ la probabilité } q_{i,j} = 0}$$

1–c)

D'après ce qui précède, la variable X_{n+1} conditionnée par l'événement $(X_n = i)$ ne peut prendre que les valeurs que $[\![0, N - i]\!]$.

L'observation de $N-i$ individus, autres que les i contagieux, est une suite de $N-i$ épreuves indépendantes, identiques, à deux issues possibles : le succès S " l'individu observé est contagieux le jour $n+1$ " et l'échec $\overline{S}$ "l'individu observé est sain le jour $n+1$ ".

La variable X_{n+1} conditionnée par l'événement $(X_n = i)$ indique le nombre de succès.

Cette variable aléatoire suit donc la loi binomiale de paramètres $N - i$ et $P(S)$.

Soit $C_1, \dots, C_i$ les individus contagieux le jour n et soit I un individu sain le jour n.

L'événement $\overline{S}$: l'individu I est sain le jour $n+1$ est l'intersection des événements indépendants suivants I_k : I n'est pas contaminé par C_k, pour $k \in [\![1, i]\!]$

$$\overline{S} = \bigcap_{k=1}^{k} I_k.$$

Or la probabilité que I ne soit pas contaminé par C_k le jour n est $q = 1 - p$. Il en résulte que $P(\overline{S}) = q^i$ et donc $P(S) = 1 - q^i$

$$\boxed{X_{n+1} \text{ conditionnée par } (X_n = i), \text{ notée } X_{n+1} \ / \ (X_n = i), \text{ suit la loi binomiale } B(N - i, 1 - q^i)}$$

2–a)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} q_{i,j} &= \sum_{j=0}^{N} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \frac{P(X_n = i \cap X_{n+1} = j)}{P(X_n = i)} \\
&= \frac{1}{P(X_n = i)} \sum_{j=0}^{N} P((X_n = i \cap X_{n+1} = j) \\
&= \frac{P(X_n = i)}{P(X_n = i)} \quad \text{d'après la formule des probabilités totales}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{j=0}^{N} q_{i,j} = 1$$

Remarque 1 : Ce résultat est valable si $P(X_n = i) \neq 0$ et cette situation est fausse si $i = N$ et $n > 0$

Si $i = N$ et $n > 0$, alors $(X_n = N) \Longrightarrow (X_{n+1} = 0)$, donc $P_{(X_n=N)}(X_{n+1} = j) = 0$ pour $j \in [\![1, N]\!]$ et $P_{(X_n=N)}(X_{n+1} = 0) = 1$

Dans ce cas là, $\sum_{j=0}^{N} q_{N,j} = \sum_{j=0}^{N} P_{(X_n=N)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_n=N)}(X_{n+1} = 0) = 1$

Donc le résultat est encore valable et on peut dire :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, N]\!],\ \sum_{j=0}^{N} q_{i,j} = 1}$$

Remarque 2 : Dans les cas $P(X_n = i) \neq 0$, on aurait pu obtenir cette égalité en disant que l'application $P_{(X_n=i)}$ est une probabilité, donc $\sum_{j=0}^{N} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = 1$ puisque la famille $(X_{n+1} = j)\ /\ 0 \leq j \leq N$ est un système complet d'événements.

La somme des termes de chaque ligne de Q vaut donc 1. Donc $Q \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N} q_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{N} q_{N,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Ceci prouve que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } Q}$ et que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ en est un vecteur propre.

2–b)

Un vecteur propre étant un vecteur non nul, il existe au moins une coordonnée non nulle ; les valeurs absolues des coordonnées sont positives ou nulles et il y en a au moins une qui est **strictement positive** (sinon toutes les coordonnées seraient nulles). Si l'on considère la coordonnée qui a la plus grande valeur absolue, cette coordonnée est non nulle, puisque sa valeur absolue est strictement positive.

Si l'on note $V(i)$ cette coordonnée, on a $|V(i)| = \max_{0\leq j\leq N} |V(j)|$ et $V(i) \neq 0$.

La ligne numéro i du système $QV = \lambda V$ s'écrit $\sum_{j=0}^{N} q_{i,j}V(j) = \lambda V(i)$, ce qui implique successivement :

$$\begin{array}{rll}
|\lambda V(i)| & = |\sum_{j=0}^{N} q_{i,j} V(j)| & \\
|\lambda||V(i)| & \leq \sum_{j=0}^{N} |q_{i,j} V(j)| & \text{inégalité triangulaire} \\
|\lambda||V(i)| & \leq \sum_{j=0}^{N} q_{i,j} |V(j)| & \text{car } q_{i,j} \geq 0 \\
|\lambda| & \leq \sum_{j=0}^{N} q_{i,j} \dfrac{|V(j)|}{|V(i)|} & \text{car } |V(i)| > 0 \\
|\lambda| & \leq \sum_{j=0}^{N} q_{i,j} & \text{car } \dfrac{|V(j)|}{|V(i)|} \leq 1 \text{ et } q_{i,j} \geq 0
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } Q, \text{ alors } |\lambda| \leq 1 \text{ car } \sum_{j=0}^{N} q_{i,j} = 1 \text{ d'après 2–a)}}$$

3)

La famille $\{(X_n = 0), \ldots, (X_n = N)\}$ est un (pseudo) système complet d'événements (pseudo puisque $P(X_n = N)$ peut être nulle).

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0, N]\!],\ P(X_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^{N} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) P(X_n = j) \\
&= \sum_{j=0}^{N} q_{j,k} P(X_n = j) \\
&= q_{0,k} P(X_n = 0) + q_{1,k} P(X_n = 1) + \ldots, q_{N,k} P(X_n = N) \\
&= \begin{pmatrix} q_{0,k} & \ldots & q_{N,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne

Donc, $\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(X_{n+1} = N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{0,0} \cdots & \cdots & q_{N,0} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{0,k} \cdots & \cdots & q_{N,k} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{0,N} \cdots & \cdots & q_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On constate que } U_{n+1} = {}^tQU_n}$$

4–a)

Par des récurrences classiques que nous ne ferons pas, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0 \text{ et } \forall k \in [\![0; N]\!],\ \forall n \in \mathbb{N},\ M^n V_k = \lambda_k^n V_k$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n \sum_{k=0}^{N} \alpha_k V_k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k M^n V_k$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k}$$

4–b)

La colonne des coordonnées de V_k est $\begin{pmatrix} V_k(0) \\ \vdots \\ V_k(i) \\ \vdots \\ V_k(N) \end{pmatrix}$, donc la colonne des coordonnées de $\alpha_k \lambda_k^n V_k$ est $\begin{pmatrix} \alpha_k \lambda_k^n V_k(0) \\ \vdots \\ \alpha_k \lambda_k^n V_k(i) \\ \vdots \\ \alpha_k \lambda_k^n V_k(N) \end{pmatrix}$, donc celle de $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k$ est $\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k(0) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k(i) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k(N) \end{pmatrix}$

La colonne des coordonnées de U_n est $\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ \vdots \\ P(X_n = i) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{L'égalité : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k \text{ donne } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N},\ P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k(i)}$$

4–c)

$P(X_n = i) = \alpha_0 V_0(i) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \lambda_k^n V_k(i)$ car $\lambda_0 = 1$

$\forall k \in [\![1, N]\!]$, on a $|\lambda_k| < 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} \lambda_k^n = 0$

$$\boxed{\text{Il en résulte que : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \forall i \in [\![0, N]\!],\ \lim_{n \to +\infty} P(X_n = i) = \alpha_0 V_0(i)}$$

D'après l'énoncé, $V_0(i) = 1$ si $i = 0$ et $V_0(i) = 0$ pour $1 \leq i \leq N$

$$\boxed{\text{Donc, } \forall i \in [\![1, N]\!],\ \lim_{n \to +\infty} P(X_n = i) = 0}$$

4–d)

La famille $\{(X_n = 0), \ldots, (X_n = N)\}$ est un (pseudo) système complet d'événements, on a :

$$\sum_{i=0}^{N} P(X_n = i) = 1 = P(X_n = 0) + \sum_{i=1}^{N} P(X_n = i)$$

D'après le résultat précédent, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} P(X_n = i) = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = 1}$

Cela veut dire que l'on est quasiment certain que le virus va disparaître.

Partie III

1−a)

Les variables aléatoires Y_i étant indépendantes et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p, la somme $\sum_{i=1}^{m} Y_i$ suit la loi binomiale $B(m,p)$ de paramètres m et p. Donc $E\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = mp$ et $E\left(\overline{Y_m}\right) = \frac{1}{m}mp = p$

$\overline{Y_m}$ est une fonction des Y_i pour $1 \le i \le m$, donc $\overline{Y_m}$ **est un estimateur de** p

$$\boxed{\overline{Y_m} \text{ est un estimateur sans biais de } p}$$

Le risque quadratique est donc égal à $V(\overline{Y_m}) = \frac{1}{m^2}V\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \frac{1}{m^2}mp(1-p) = \boxed{\frac{p(1-p)}{m}}$

1−b)

On veut montrer que $P\left(\overline{Y_m} - \sqrt{\frac{5}{m}} \le p \le \overline{Y_m} + \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \ge 0.95$

ceci équivaut à $P\left(|\overline{Y_m} - p| \le \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \ge 0.95$, puis à $-P\left(|\overline{Y_m} - p| \le \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \le -0.95$, c'est-à-dire $1 - P\left(|\overline{Y_m} - p| \le \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \le 0.05$, et finalement $P\left(|\overline{Y_m} - p| > \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \le 0.05$.

D'après Bienaymé-Tchebycheff, $P\left(|\overline{Y_m} - p| > \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \le \frac{V(\overline{Y_m})}{\left(\sqrt{\frac{5}{m}}\right)^2}$ **(1)**

Or $\frac{V(\overline{Y_m})}{\left(\sqrt{\frac{5}{m}}\right)^2} = \frac{p(1-p)}{m \times \frac{5}{m}} = \frac{p(1-p)}{5}$

D'autre part, pour tout $p \in [0;1]$, $p(1-p) \le \frac{1}{4}$ (inégalité classique dite de Bernoulli)

Montrons la :

Posons $f(x) = x(1-x)$ pour $x \in [0;1]$; $f'(x) = 1 - 2x$ d'où le tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

On a immédiatement $\forall x \in [0;1]$, $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ et comme $p \in]0;1[$, on a bien $p(1-p) \le \frac{1}{4}$

Par suite, $\frac{V(\overline{Y_m})}{\left(\sqrt{\frac{5}{m}}\right)^2} \le \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{20} = 0.05$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{L'inégalité } \mathbf{(1)} \text{ donne } P\left(|\overline{Y_m} - p| > \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \le 0.05 \\ \text{donc} \\ P\left(\overline{Y_m} - \sqrt{\frac{5}{m}} \le p \le \overline{Y_m} + \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \ge 0.95\end{gathered}}$$

2−a)

$$\begin{aligned} \overline{Y_m} - p \ge \varepsilon &\iff m\theta(\overline{Y_m} - p) \ge m\theta\varepsilon \quad \text{car } m\theta > 0 \\ &\iff m\theta\overline{Y_m} \ge m\theta(p+\varepsilon) \\ &\iff \exp(m\theta\overline{Y_m}) \ge \exp(m\theta(p+\varepsilon)) \quad \text{car exp est strictement croissante} \end{aligned}$$

Les événements $(\overline{Y_m} - p \ge \varepsilon)$ et $\left(\exp(m\theta\overline{Y_m}) \ge \exp(m\theta(p+\varepsilon))\right)$ sont donc égaux : ils ont même probabilité

$$\boxed{\forall \theta > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ P(\overline{Y_m} - p \ge \varepsilon) = P\left(\exp(m\theta\overline{Y_m}) \ge \exp(m\theta(p+\varepsilon))\right)}$$

2−b)

Posons $T(\Omega) = \{t_1, \dots, t_n\}$, alors $E(T) = \sum_{k=1}^{n} t_k P(T = t_k)$

Posons $I_a = \{k \in [\![1,n]\!] \ / \ t_k \ge a\}$ et $\overline{I_a} = \{k \in [\![1,n]\!] \ / \ t_k < a\}$. Les deux ensembles I_a et $\overline{I_a}$ forment une partition de $[\![1,n]\!]$, l'un de ces deux ensembles pouvant être vide.

$E(T) = \sum_{k \in I_a} t_k P(T = t_k) + \sum_{k \in \overline{I_a}} t_k P(T = t_k)$ avec la convention que si un des deux ensembles I_a ou $\overline{I_a}$ est vide, la somme correspondante est nulle.

La variable T ne prend que des valeurs positives, donc $\sum_{k \in \overline{I_a}} t_k P(T = t_k) \ge 0$ et il s'ensuit

$$E(T) \ge \sum_{k \in I_a} t_k P(T = t_k)$$

$\forall k \in I_a$, $t_k \ge a$, donc $t_k P(T = t_k) \ge aP(T = t_k)$ car $P(T = t_k) \ge 0$.

Sommons ces inégalités pour $k \in I_a$, il vient $\sum_{k \in I_a} t_k P(T = t_k) \ge a \sum_{k \in I_a} P(T = t_k)$, c'est-à-dire $\sum_{k \in I_a} t_k P(T = t_k) \ge aP(T \in I_a)$, puis $E(T) \ge aP(T \ge a)$.

Et comme $a > 0$, on a :

$$\boxed{\forall a > 0,\ P(T \ge a) \le \frac{E(T)}{a}}$$

2−c)

La variable aléatoire $\exp(m\theta\overline{Y_m})$ prend des valeurs positives strictement par propriété de l'exponentielle. les variables Y_i ne prennent que deux valeurs 0 ou 1, donc $\overline{Y_m}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et par conséquent $\exp(m\theta\overline{Y_m})$ également. On peut donc appliquer à cette variable l'inégalité de 2−b). Cette inégalité s'écrit :

$$P\left(\exp(m\theta\overline{Y_m}) \ge \exp(m\theta(p+\varepsilon))\right) \le \frac{E(\exp(m\theta\overline{Y_m})}{\exp(m\theta(p+\varepsilon))}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} E(\exp(m\theta\overline{Y_m}) &= E(\exp(m\theta\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i)) \\ &= E(\exp(\theta\sum_{i=1}^{m} Y_i)) \\ &= E(\prod_{i=1}^{m} \exp(\theta Y_i)) \end{aligned}$$

Les variables Y_i sont indépendantes, donc les variables $\exp(\theta Y_i)$ aussi en tant que fonctions des Y_i ; il en résulte que $E(\exp(m\theta\overline{Y_m})) = E(\prod_{i=1}^{m} \exp(\theta Y_i)) = \prod_{i=1}^{m} E(\exp(\theta Y_i))$.

D'après le théorème du tranfert,

$E(\exp(\theta Y_i)) = \exp(\theta \times 0) \times P(Y_i = 0) + \exp(\theta \times 1) \times P(Y_i = 1) = q + p\exp(\theta)$

Il en résulte que $E(\exp(m\theta\overline{Y_m})) = (q + p\exp(\theta))^m$ et

$$\boxed{\forall(\theta,\varepsilon)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ P(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)\leq\frac{(q+p\exp(\theta))^m}{\exp(m\theta(p+\varepsilon))}}$$

Ceci s'écrit aussi

$P(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)\leq\dfrac{\exp\Big(m\ln(q+p\exp(\theta))\Big)}{\exp(m\theta(p+\varepsilon))}$ ou

$$\boxed{P(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)\leq\exp\Big(m(g(\theta)-\theta(p+\varepsilon))\Big)}$$

2–d)

L'application $x\longmapsto pe^x+q$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ **et à valeurs dans** $\mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est de classe C^2 **sur** $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction $g\ :\ x\longmapsto\ln(pe^x+q)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x\geq 0,\ g'(x)=\dfrac{pe^x}{q+pe^x}$ et $\boxed{g''(x)=\dfrac{pqe^x}{(pe^x+q)^2}}$

$$\begin{aligned}
|g''(x)|\leq\frac{1}{4}\ &\Longleftrightarrow g''(x)\leq\frac{1}{4}\quad\text{car } g''(x)>0\\
&\Longleftrightarrow \frac{pqe^x}{(pe^x+q)^2}\leq\frac{1}{4}\\
&\Longleftrightarrow 4pqe^x\leq(pe^x+q)^2\quad\text{on a multiplié par } 4(pe^x+q)^2>0\\
&\Longleftrightarrow 0\leq(pe^x)^2-2pqe^x+q^2\\
&\Longleftrightarrow 0\leq(pe^x-q)^2,\quad\text{ce qui est toujours vrai}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : comme il s'agit d'équivalences, } \forall x\geq 0,\ |g''(x)|\leq\frac{1}{4}}$$

2–e)

La fonction g étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, et $|g''|$ étant majorée sur $\mathbb{R}_+$ par $\frac{1}{4}$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur le segment $[0,\theta]$. On obtient

$$|g(\theta)-g(0)-\theta g'(0)|\leq\frac{\theta^2}{2}\max_{t\in[0;\theta]}|g''(t)|$$

$$\text{ou encore } |g(\theta)-g(0)-\theta g'(0)|\leq\frac{\theta^2}{8}\ \text{puisque}\ \max_{t\in[0;\theta]}|g''(t)|\leq\frac{1}{4}$$

Rappelons qu'un réel est toujours inférieur ou égal à sa valeur absolue, donc

$g(\theta)-g(0)-\theta g'(0)\leq|g(\theta)-g(0)-\theta g'(0)|$, soit encore $g(\theta)-g(0)-\theta g'(0)\leq\dfrac{\theta^2}{8}$

Remarquons que $g(0)=\ln(p+q)=0$ puisque $p+q=1$ et $g'(0)=\dfrac{p}{p+q}=p$. l'inégalité précédente donne alors

$$\boxed{\forall\theta>0,\ g(\theta)\leq p\theta+\frac{\theta^2}{8}}$$

2–f)

$\forall x>0,\ h'(x)=\frac{x}{4}-\varepsilon$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		4ε		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	0	$\searrow$	$-2\varepsilon^2$	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall\theta\geq 0,\ g(\theta)-\theta(p+\varepsilon)\leq\theta p+\dfrac{\theta^2}{8}-\theta(p+\varepsilon)$ d'après 2–e), soit encore

$\forall\theta\geq 0,\ g(\theta)-\theta(p+\varepsilon)\leq\dfrac{\theta^2}{8}-\theta\varepsilon$

Comme $m>0,\ \forall\theta\geq 0,\ m(g(\theta)-\theta(p+\varepsilon))\leq m(\dfrac{\theta^2}{8}-\theta\varepsilon)$, et la fonction exp étant croissante,

$\forall\theta\geq 0,\ \exp(m(g(\theta)-\theta(p+\varepsilon)))\leq\exp(m(\dfrac{\theta^2}{8}-\theta\varepsilon))$, soit finalement

$\forall\theta\geq 0,\ \exp(m(g(\theta)-\theta(p+\varepsilon)))\leq\exp(mh(\theta))$

En particulier, pour $\theta=4\varepsilon$, $P(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)\leq\exp(mh(4\varepsilon)$ d'après 2–c), donc

$$\boxed{P(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)\leq\exp(-2m\varepsilon^2)}$$

3)

Posons $W_i=1-Y_i$ pour $i\in[\![1,m]\!]$. $Y_i(\Omega)=\{0,1\}\Longrightarrow W_i(\Omega)=\{0,1\}$

$P(W_i=1)=P(Y_i=0)=q$.

Les variables aléatoires W_i suivent la même loi de Bernoulli de paramètre q, elles sont indépendantes car les Y_i le sont. On peut donc leur appliquer l'inégalité du 2–f).

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P(\overline{W_m}-q\geq\varepsilon)\leq\exp(-2m\varepsilon^2)}$$

4–a)

$$\begin{aligned}
(|\overline{Y_m}-p|\geq\varepsilon)\ &=\ \underbrace{(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)}_{\text{cas où }\overline{Y_m}-p\geq 0}\ \cup\ \underbrace{(-(\overline{Y_m}-p)\geq\varepsilon)}_{\text{cas où }\overline{Y_m}-p\leq 0}\\
&=(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)\cup(\overline{Y_m}-p)\leq-\varepsilon)
\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\overline{W_m}\ &=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1-Y_i)\\
&=\frac{1}{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}1-\sum_{i=1}^{m}Y_i)\\
&=\frac{1}{m}(m-\sum_{i=1}^{m}Y_i)\\
&=1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i\\
&=1-\overline{Y_m}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\overline{Y_m}-p\leq-\varepsilon)\ &=(p-\overline{Y_m}\geq\varepsilon)\\
&=(p-(1-\overline{W_m})\geq\varepsilon)\\
&=(p-1+\overline{W_m}\geq\varepsilon)\\
&=(\overline{W_m}-q\geq\varepsilon)
\end{aligned}$$

Donc $(|\overline{Y_m}-p|\geq\varepsilon)=(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)\cup(\overline{W_m}-q\geq\varepsilon)$.

Ces deux événements sont incompatibles puisque les événements $(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)$ et $(\overline{Y_m}-p\leq-\varepsilon)$ le sont. Donc

$P(|\overline{Y_m}-p|\geq\varepsilon)=P(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon)+P(\overline{W_m}-q\geq\varepsilon)$, donc

$P(|\overline{Y_m}-p|\geq\varepsilon)\leq\exp(-2m\varepsilon^2)+\exp(-2m\varepsilon^2)$ d'après les questions 2–f) et 3). D'où

$$\boxed{P(|\overline{Y_m}-p|\geq\varepsilon)\leq 2\exp(-2m\varepsilon^2)}$$

4–b)

$$\begin{aligned}2\exp(-2m\varepsilon^2) &= 2\exp(-2m\frac{1.844}{m})\\ &= 2\exp(-3.688)\\ &\simeq 2\exp(\ln(0.025))\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc, } 2\exp(-2m\varepsilon^2) \simeq 0.05}$$

Pour $\varepsilon = \sqrt{\frac{1.844}{m}}$,

$$\begin{aligned}P\Big(|\overline{Y_m} - p| \geq \sqrt{\frac{1.844}{m}}\Big) \leq 0.05 &\iff 1 - P\Big(|\overline{Y_m} - p| \geq \sqrt{\frac{1.844}{m}}\Big) \geq 1 - 0.05\\ &\iff P\Big(|\overline{Y_m} - p| < \sqrt{\frac{1.844}{m}}\Big) \geq 0.95\\ &\iff P\Big(\overline{Y_m} - \sqrt{\frac{1.844}{m}} < p < \overline{Y_m} + \sqrt{\frac{1.844}{m}}\Big) \geq 0.95\end{aligned}$$

Un intervalle de confiance au niveau 0.95 **pour** p **est** $I_1 = [\overline{Y_m} - \sqrt{\frac{1.844}{m}}; \overline{Y_m} + \sqrt{\frac{1.844}{m}}]$

Dans B–8), on avait trouvé un intervalle $I_0 = [\overline{Y_m} - \sqrt{\frac{5}{m}}; \overline{Y_m} + \sqrt{\frac{5}{m}}]$

On a $I_1 \subset I_0$ puisque $\sqrt{\frac{1.844}{m}} < \sqrt{\frac{5}{m}}$.

L'intervalle I_1 est plus précis que I_0 puisque pour un même risque la marge d'erreur est plus faible pour I_1 que pour I_0