# Corrigés des épreuves 2002 de maths I et II HEC voie S

**Roger Cuculière**
***Professeur de mathématiques en classes préparatoires,***
***lycée Pasteur (Neuilly sur Seine).***

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

**OPTION SCIENTIFIQUE**

**MATHEMATIQUES I**

Jeudi 16 Mai 2002, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Le sujet ci-dessous vise à faire comprendre comment deux concurrents aux intérêts antagonistes, ne parvenant pas à fixer conjointement les stratégies de l'un et l'autre, conviennent de les tirer au sort avec des probabilités bien déterminées.*

**Notations :**

*Dans tout le problème $n$ et $p$ désignent des entiers naturels non nuls fixés et on pose $E_n = \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit de même $E_p$.*

*On note $K_n$ l'ensemble* $\left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_n, x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ *; on définit de même $K_p$.*

*Les espaces $E_n$ et $E_p$ sont munis de leur structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur $X$ de $E_n$ est notée $\|X\|$ ; le produit scalaire de deux vecteurs $X$ et $Y$ de $E_n$ est noté $\langle X, Y\rangle$ ; on adopte la même notation pour les vecteurs de $E_p$.*

*Enfin, si $k$ est un entier naturel non nul et si $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille finie de réels, on note $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}\, z_i$ ou $\underset{i}{\mathrm{Max}}\, z_i$ (respectivement $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\, z_i$ ou $\underset{i}{\mathrm{Min}}\, z_i$) son plus grand (respectivement son plus petit) élément.*

*Plus généralement, si $f$ est une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant un maximum (respectivement un minimum) sur $E$, on note $\underset{x\in\mathcal{A}}{\mathrm{Max}}\, f(x)$, (respectivement $\underset{x\in\mathcal{A}}{\mathrm{Min}}\, f(x)$), ce maximum, (respectivement ce minimum).*

**Partie I. Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits**

*Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

*On note $u(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\left(\underset{1\leqslant j\leqslant p}{\mathrm{Max}}\, a_{ij}\right)$ et $v(A) = \underset{1\leqslant j\leqslant p}{\mathrm{Max}}\left(\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\, a_{ij}\right)$. Pour simplifier les notations, on pourra écrire ces expressions : $u(A) = \underset{i}{\mathrm{Min}}\,\underset{j}{\mathrm{Max}}\, a_{ij}$ et $v(A) = \underset{j}{\mathrm{Max}}\,\underset{i}{\mathrm{Min}}\, a_{ij}$.*

**1)** Calculer $u(A)$ et $v(A)$ dans les deux cas suivants : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

**2)** On revient au cas général où $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $s_{j_0} = \underset{i}{\mathrm{Min}}\, a_{ij_0}$ et $t_{i_0} = \underset{j}{\mathrm{Max}}\, a_{i_0 j}$.

**a)** Montrer que $s_{j_0} \leqslant t_{i_0}$ pour tout $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

**b)** En déduire que $v(A) \leqslant u(A)$.

**3)** On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

1) deux constantes entières : `n` et `p`,

2) un type : `matrice = array[1..n,1..p] of real;`

**a)** Écrire le corps de la fonction `function Max_ligne (A:matrice; i:integer): real;` cette fonction doit retourner le plus grand élément de la ligne `i` de la matrice `A`, c'est-à-dire la valeur $\underset{j}{\mathrm{Max}}\, A[i,j]$.

**b)** Écrire le corps de la fonction `function MinMax(A:matrice):real;` cette fonction doit retourner la valeur $u(A)$, définie plus haut; on pourra utiliser la fonction `Max_ligne`.

## Partie II. Le minimum des maxima et le maximum des minima

**1)** Dans cette question on étudie un exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ puis $h(x,y) = {}^tXAY$.

**a)** Calculer $h(x,y)$ en fonction de $x$ et $y$.

**b)** Déterminer suivant les valeurs de $x \in [0,1]$, le maximum de la fonction $y \longmapsto h(x,y)$ sur $[0,1]$; ce maximum sera noté $\lambda(x)$.

**c)** Déterminer la valeur minimum de $\lambda(x)$ lorsque $x$ décrit $[0,1]$. Cette valeur sera notée $\alpha(A)$, elle est donc égale à $\underset{X\in K_2}{\mathrm{Min}}\left(\underset{Y\in K_2}{\mathrm{Max}}\, {}^tXAY\right)$, qu'on note plus simplement $\underset{X}{\mathrm{Min}}\,\underset{Y}{\mathrm{Max}}\, {}^tXAY$, étant entendu que $X$ et $Y$ décrivent $K_2$.

**d)** Par une méthode analogue, montrer l'existence de $\beta(A) = \underset{Y}{\mathrm{Max}}\,\underset{X}{\mathrm{Min}}\, {}^tXAY$ et donner sa valeur.

*Dans la suite de cette partie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ désigne une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

*On définit la fonction $f$ sur $K_n \times K_p$ par: $\forall (X,Y) \in K_n \times K_p,\ f(X,Y) = {}^tXAY$.*

*Pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$ et tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n$, on pose $\varphi_j(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$, puis $\lambda(X) = \underset{1\leqslant j\leqslant p}{\mathrm{Max}}\, \varphi_j(X)$.*

**2)** On considère des fonctions $g_1, \dots, g_p$ définies et continues sur $K_n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**a)** On pose $h = \mathrm{Max}(g_1, g_2)$, c'est-à-dire la fonction de $K_n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{Max}\left(g_1(x), g_2(x)\right)$.

Vérifier que $h = \dfrac{g_1+g_2+|g_1-g_2|}{2}$ et en déduire que $h$ est continue sur $K_n$.

**b)** Montrer que la fonction $g = \mathrm{Max}(g_1,\dots,g_p)$ est continue sur $K_n$, $g$ étant définie sur $K_n$ par: $\forall x \in K_n,\ g(x) = \mathrm{Max}\left(g_1(x),\dots,g_p(x)\right)$.

**3)** Dans cette question on considère un élément $X$ appartenant à $K_n$.

**a)** Montrer que pour tout $Y \in K_p$, $f(X,Y) \leqslant \lambda(X)$.

**b)** Montrer qu'il existe $Y_X \in K_p$ tel que $f(X,Y_X) = \lambda(X)$.

**c)** En déduire qu'on peut poser: $\lambda(X) = \underset{Y\in K_p}{\mathrm{Max}}\, f(X,Y)$.

**4) a)** Montrer que $K_n$ est borné.

(*On admet pour la suite du problème, que $K_n$ est une partie fermée de $E_n$*)

**b)** Montrer que $\lambda$ admet un minimum sur $K_n$.

*Ce minimum est noté $\alpha(A)$ et il est donc égal à $\underset{X\in K_n}{\mathrm{Min}}\left(\underset{Y\in K_p}{\mathrm{Max}}\, {}^tXAY\right)$, qu'on note plus simplement $\underset{X}{\mathrm{Min}}\,\underset{Y}{\mathrm{Max}}\, {}^tXAY$.*

*On montrerait de manière analogue que le nombre $\underset{Y\in K_p}{\mathrm{Max}}\left(\underset{X\in K_n}{\mathrm{Min}}\, {}^tXAY\right)$ existe. Il est noté $\beta(A)$ et on l'écrit plus simplement $\underset{Y}{\mathrm{Max}}\,\underset{X}{\mathrm{Min}}\, {}^tXAY$.*

**5) a)** Soit $(X',Y)$ appartenant à $K_n \times K_p$. Montrer que $\underset{X\in K_n}{\mathrm{Min}}\, f(X,Y) \leqslant \lambda(X')$.

**b)** En déduire: $\beta(A) \leqslant \alpha(A)$.

**6)** *On dit qu'une partie non vide $\mathscr{C}$ de $E_p$ est convexe lorsque: $\forall (X,Y) \in \mathscr{C}^2,\ \forall m \in [0,1],\ mY+(1-m)X \in \mathscr{C}$.*

On considère dans cette question une partie $\mathscr{C}$ de $E_p$ convexe, fermée, bornée et non vide.

**a)** Montrer qu'il existe $W \in \mathscr{C}$, tel que: $\forall Y \in \mathscr{C},\ \|W\| \leqslant \|Y\|$.

**b)** Soit $Y$ appartenant à $\mathscr{C}$, on pose pour tout $m \in [0,1]$: $Y_m = (1-m)W + mY$.

- Montrer que: $\forall m \in ]0,1[,\ \langle W,Y\rangle \geqslant \dfrac{2-m}{2(1-m)}\|W\|^2 - \dfrac{m}{2(1-m)}\|Y\|^2$.

*On rappelle que $\langle W,Y\rangle\ (= {}^tWY)$ désigne le produit scalaire de $W$ et $Y$.*

- En déduire que: $\langle W,Y\rangle \geqslant \|W\|^2$.

**7)** Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie on considère l'ensemble:

$$\mathscr{C} = \left\{m\ {}^tAX + (1-m)\,Y,\ X \in K_n,\ Y \in K_p,\ m \in [0,1]\right\}$$

**a)** Montrer que $K_n$ est une partie convexe de $E_n$.

**b)** Montrer que $\mathscr{C}$ est une partie convexe et bornée de $E_p$.

*On admet pour la suite que $\mathscr{C}$ est une partie fermée de $E_p$.*

**8)** On suppose dans cette question que le vecteur nul appartient à $\mathscr{C}$.

**a)** Montrer qu'il existe $X_0 \in K_n$, $Y_0 \in K_p$ et un réel $\mu \leqslant 0$ tels que: ${}^tAX_0 = \mu Y_0$.

**b)** Déterminer le signe de ${}^tX_0AY$ pour tout $Y \in K_p$.

**c)** Déterminer le signe de $\alpha(A)$.

**9)** Dans cette question on suppose que le vecteur nul n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

**a)** Montrer qu'il existe un élément $W \in \mathscr{C}$ tel que :

$$\forall m \in [0,1],\ \forall X \in K_n,\ \forall Y \in K_p,\ m\ {}^tXAW + (1-m)\ {}^tYW > 0$$

**b)** On note $w_1, \dots, w_p$ les coordonnées de $W$ dans la base canonique de $E_p$.

Montrer que $w_i > 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$.

**c)** Montrer que: $\forall X \in K_n,\ {}^tXAW > 0$.

**d)** Montrer qu'il existe un vecteur $W' \in K_p$ tel que: $\forall X \in K_n,\ {}^tXAW' > 0$.

**e)** Montrer que $\beta(A) > 0$.

**10)** On définit la matrice $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $B = A - \beta(A)J$ où $J$ est la matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

**a)** Déterminer les valeurs $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ en fonction de $\alpha(A)$ et $\beta(A)$.

**b)** Déduire des questions précédentes que $\alpha(A) = \beta(A)$.

## Partie III. Point-selle et point critique

Dans cette partie, $A$ désigne toujours une matrice de à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(X,Y)$ appartenant à $K_n \times K_p$: $f(X,Y) = {}^tXAY$.

*On dit que le couple $(X_0,Y_0)$ appartenant à $K_n \times K_p$ est un point-selle pour $f$, lorsque:*

$$\forall (X,Y) \in K_n \times K_p,\ f(X_0,Y) \leqslant f(X_0,Y_0) \leqslant f(X,Y_0)$$

**1)** Montrer qu'il existe un point-selle pour $f$ et que si $(X_0,Y_0)$ en est un, alors $f(X_0,Y_0) = \alpha(A)$.

**2)** On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on définit la fonction $g$ sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

On appelle point critique de $g$ tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(u,v) = 0$.

**a)** Montrer que $g$ admet un unique point critique $(x_0,y_0)$ si et seulement si $a+d-b-c \neq 0$. Déterminer dans ce cas $(x_0,y_0)$.

**b)** On suppose $a-b$ et $d-c$ de même signe et non tous nuls et on suppose également que $a-c$ et $d-b$ sont de même signe et non tous nuls.

- Montrer que dans ce cas $g$ admet un unique point critique $(x_0,y_0)$ et que $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$.
- Montrer que: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = g(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)(a+d-b-c)$.

On pourra introduire les notations suivantes: $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}$, $U = X - X_0$, $V = Y - Y_0$, et on exprimera $g(x,y)$ à l'aide de $U$, $V$, $A$, $X_0$ et $Y_0$.

- En déduire que $\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}\right)$ est un point-selle pour l'application $f$ définie sur $K_2 \times K_2$ par: $\forall (X,Y) \in K_2 \times K_2,\ f(X,Y) = {}^tXAY$.
- Quelle est la valeur de $\alpha(A)$ ?

## Partie IV. Application à une étude de la concurrence

Deux entrepreneurs Primus et Secundus se partagent le marché d'un produit sur un territoire commun, de sorte qu'au cours d'un trimestre, si l'un voit sa part de marché varier de $\Delta$ unités (nombre réel positif ou négatif) l'autre voit la sienne varier de $-\Delta$ unités. Cette variation dépend à chaque trimestre des stratégies choisies par l'un et l'autre.

Primus a le choix entre deux stratégies notées $P_1$ et $P_2$, Secundus a le choix entre deux stratégies $S_1$ et $S_2$. Lorsque Primus et Secundus choisissent chacun l'une de leurs deux stratégies, leurs parts de marché sont modifiées et le tableau suivant donne les variations trimestrielles de la part de marché de Secundus, celles de Primus étant opposées.

| *Variation trimestrielle de la part de marché de Secundus lorsque :* | Secundus choisit $S_1$ | Secundus choisit $S_2$ |
|---|---|---|
| Primus choisit $P_1$ | $-2$ | $3$ |
| Primus choisit $P_2$ | $1$ | $-1$ |

Dans une négociation entre Primus et Secundus, si Secundus propose par exemple $S_2$, Primus propose alors $P_2$, mais dans ce cas Secundus préfère $S_1$ et Primus souhaite alors $P_1$, ce qui pousse Secundus à choisir de nouveau $S_2$: finalement toute entente semble être impossible.

Primus et Secundus décident alors de s'en remettre au hasard de la manière suivante: les deux concurrents choisissent simultanément et aléatoirement l'une des deux stratégies dont chacun dispose: Primus choisit la stratégie $P_1$ avec la probabilité $x$ ($x \in [0,1]$) et la stratégie $P_2$ avec la probabilité $1-x$, Secundus, indépendamment du choix de Primus, choisit la stratégie $S_1$ avec la probabilité $y$, ($y \in [0,1]$) et la stratégie $S_2$ avec la probabilité $1-y$. On note, dans ces conditions, $V_{x,y}$ la variable aléatoire égale à la variation trimestrielle de la part de marché de Secundus.

**1)** Déterminer l'espérance de $V_{x,y}$.

**2)** Établir qu'il existe des probabilités $x_0$ et $y_0$ telles que Primus (respectivement Secundus) ne trouve aucun avantage à prendre $x$ différent de $x_0$ (respectivement $y$ différent de $y_0$), lorsque Secundus (respectivement Primus) s'en tient à $y_0$ (respectivement à $x_0$).
Déterminer les valeurs de $x_0$ et $y_0$.

# Partie I
# Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits

**I. 1)** • Les maxima des lignes de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont successivement : 3, 1.

Leur minimum est : $u(A) = 1$.
• Les minima des colonnes de $A$ sont successivement : $-2$, $-1$. Leur maximum est : $v(A) = -1$.

• Les maxima des lignes de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ sont successivement : 6, 1, 3.

Leur minimum est : $u(A) = 1$.
• Les minima des colonnes de $A$ sont successivement : $-2$, 1 , $-2$. Leur maximum est : $v(A) = 1$.

**I. 2) a)** • Soient $i_0 \in \{1,2,\ldots, n\}$ et $j_0 \in \{1,2,\ldots, p\}$.

• Pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a : $s_{j_0} = \operatorname{Min}_i a_{i,j_0} \le a_{i,j_0}$, et pour tout $j \in \{1,2,\ldots,p\}$, on a : $t_{j_0} = \operatorname{Max}_j a_{i_0,j} \ge a_{i_0,j}$.

En conséquence : $s_{j_0} \le a_{i_0,j_0} \le t_{i_0}$.

**I. 2) b)** • On a : $v(A) = \operatorname{Max}_j \operatorname{Min}_i a_{ij} = \operatorname{Max}_j s_j = s_{j_0}$ pour un certain $j_0 \in \{1,2,\ldots,p\}$.

• De même, $u(A) = \operatorname{Min}_i \operatorname{Max}_j a_{ij} = \operatorname{Min}_i t_i = t_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$.

• D'après I. 2. a : $v(A) = s_{j_0} \le t_{i_0} = u(A)$.

**I. 3) a)** • Fonction `Max_ligne(A,i)` :

```
(***********************************************)
FUNCTION Max_ligne(A:matrice;i:integer):real;
Var M:real;
Begin
   M:=A[i,1];
   for j:=2 to p do
      if A[i,j]>M then M:=A[i,j];
   Max_ligne:=M;
End;
(***********************************************)
```

**I. 3) b)** • Fonction `MinMax(A)` :

```
(***********************************************)
FUNCTION MinMax(A:matrice):real;
Var m:real;
Begin
   m:= Max_ligne(A,1);
   for i:=2 to n do
      if  Max_ligne(A,i)<m  then m:= Max_ligne(A,i);
   MinMax:=m;
End;
(***********************************************)
```

## Partie II – Le minimum des maxima et le maximum des minima

• Conformément à la norme AFNOR en vigueur aujourd'hui, nous notons $A^T$ la transposée d'une matrice $A$, en abandonnant sans regret la notation obsolète ${}^tA$.

**II. 1) a)** • On a : $h(x,y) = X^T AY = (x \quad 1-x)\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$

$= x(-5y+3) + (1-x)(2y-1) = -7xy + 4x + 2y - 1.$

**II. 1) b)** • On a : $h(x, y) = (-7x + 2)y + (4x - 1)$.

• Si : $0 \le x \le \frac{2}{7}$, alors $-7y + 2 \ge 0$, et la fonction : $y \mapsto h(x,y)$ est croissante, et son maximum sur [0, 1] est donc : $\lambda(x) = h(x, 1) = -3x + 1$.

• Si : $\frac{2}{7} \le x \le 1$, alors $-7y + 2 \le 0$, et la fonction : $y \mapsto h(x,y)$ est décroissante, et son maximum sur [0, 1] est donc : $\lambda(x) = h(x, 0) = 4x - 1$.

**II. 1) c)** • La fonction : $x \mapsto \lambda(x)$ est décroissante sur $[0, \frac{2}{7}]$ et croissante sur $[\frac{2}{7}, 1]$. Son minimum sur [0, 1] est donc : $\lambda(\frac{2}{7}) = \frac{1}{7} = \alpha(A)$.

**II. 1) d)** • On a de même : $h(x, y) = (-7y + 4)x + (2y - 1)$. Toujours de même, on observe que si $0 \le y \le \frac{4}{7}$, alors la fonction $x \mapsto h(x,y)$ est croissante, et son maximum sur [0, 1] est donc : $\mu(y) = h(1, y) = -5y + 3$. Si $\frac{4}{7} \le y \le 1$, alors la fonction $x \mapsto h(x,y)$ est décroissante, et son maximum sur [0, 1] est donc : $\mu(y) = h(0, y) = 2y - 1$. Cette fonction $y \mapsto \mu(y)$ est décroissante sur $[0, \frac{4}{7}]$ et croissante sur $[\frac{4}{7}, 1]$. Son minimum sur [0, 1] est donc : $\mu(\frac{4}{7}) = \frac{1}{7} = \beta(A)$

**II. 2) a)** • Si $g_1(x) \ge g_2(x)$, alors : $\mathrm{Max}(g_1(x), g_2(x)) = g_1(x)$.
Par ailleurs : $|g_1(x) - g_2(x)| = g_1(x) - g_2(x)$, d'où :
$\frac{1}{2}(g_1(x) + g_2(x) + |g_1(x) - g_2(x)|) = g_1(x) = \mathrm{Max}(g_1(x), g_2(x))$.
• Si $g_1(x) \le g_2(x)$, alors : $\mathrm{Max}(g_1(x), g_2(x)) = g_2(x)$.
Par ailleurs : $|g_1(x) - g_2(x)| = g_2(x) - g_1(x)$, d'où :
$\frac{1}{2}(g_1(x) + g_2(x) + |g_1(x) - g_2(x)|) = g_2(x) = \mathrm{Max}(g_1(x), g_2(x))$.

• Ceci prouve que : $h = \mathrm{Max}(g_1, g_2) = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|)$.

• Les fonctions $g_1$ et $g_2$ étant continues, la fonction $g_1 - g_2$ l'est aussi, ainsi que la fonction $|g_1 - g_2|$, et finalement la fonction : $\frac{1}{2}(g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|) = h$ l'est aussi.

**II. 2) b)** • A la question II. 2. a, on a démontré la propriété demandée pour $p = 2$. Supposons-la vraie pour un certain entier $p \ge 2$. Soient $g_1, g_2, \ldots, g_p, g_{p+1}$ des fonctions continues sur $K_n$, et soit :
$g = \mathrm{Max}(g_1, g_2, \ldots, g_p, g_{p+1})$. De par l'hypothèse de récurrence, la fonction $h = \mathrm{Max}(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ est continue sur $K_n$. De plus, on a : $g = \mathrm{Max}(h, g_{p+1})$, qui est continue d'après II. 2. a. *CQFD*.

**II. 3)** • Soit $X \in K_n$.

**II. 3) a)** • On a : $f(X,Y) = X^T AY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{p} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = \sum_{j=1}^{p} y_j \varphi_j(X)$, d'où :

$$f(X,Y) \le \sum_{j=1}^{p} y_j \lambda(X) = \lambda(X)\sum_{j=1}^{p} y_j = \lambda(X).$$

**II. 3) b)** • Il existe $j_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que : $\lambda(X) = \mathrm{Max}_{1 \le j \le p}\, \varphi_j(X) = \varphi_{j_0}(X) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j_0} x_i$. Soit $Y_X$ le vecteur-colonne élément de $E_p = \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, et dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne numéro $j_0$, qui est égal à 1. Il est clair que $Y_X \in K_p$. De plus : $f(X, Y_X) = \sum_{j=1}^{p} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij_0} = \lambda(X)$.

**II. 3) c)** • D'après II. 3. a et II. 3. b, on a, pour tout $Y \in K_p$ : $f(X,Y) \le \lambda(X) = f(X, Y_X)$, ce qui montre que $\lambda(X) = f(X, Y_X)$ est le plus grand des réels $f(X, Y)$ lorsque $Y$ décrit $K_p$, autrement dit :

$$\lambda(X) = \mathrm{Max}_{Y \in K_p}\, f(X,Y).$$

**II. 4) a)** • Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n$, alors : $0 \le x_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, d'où : $0 \le x_i^2 \le x_i$, et par suite :

$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, soit : $\|X\| \le 1$ ce qui prouve que l'ensemble $K_n$ est borné.

• On admet que l'ensemble $K_n$ est fermé dans $E_n$.

**II. 4) b)** • Pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, la fonction $\varphi_j$ est continue sur $K_n$, comme combinaison linéaire des applications-coordonnées $X \mapsto x_i$. La fonction : $X \mapsto \lambda(X) = \mathrm{Max}_{1 \le j \le p}\, \varphi_j(X)$ est donc continue d'après II. 2. b.

• Il est bien-connu qu'une fonction continue sur une partie bornée et fermée de $E_n$, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire admet un maximum et un minimum ; la fonction $\lambda$ admet donc un minimum sur $K_n$.

**II. 5) a)** • Quel que soit le couple $(X', Y) \in K_n \times K_p$, on a : $\mathrm{Min}_{X \in K_n}\, f(X,Y) \le f(X', Y) \le \lambda(X')$ (cette dernière inégalité d'après II. 3. a).

**II. 5) b)** • Comme le second membre de l'inégalité : $\mathrm{Min}_{X \in K_n}\, f(X,Y) \le \lambda(X')$ ne dépend pas de $Y$ élément de $K_p$, on en déduit : $\beta(A) = \mathrm{Max}_{Y \in K_p}\, \mathrm{Min}_{X \in K_n}\, f(X,Y) \le \lambda(X')$. Et comme ceci est vrai pour tout $X' \in K_n$, on en conclut : $\beta(A) \le \mathrm{Min}_{X' \in K_n}\, \lambda(X') = \mathrm{Min}_{X' \in K_n}\, \mathrm{Max}_{Y \in K_p}\, f(X', Y) = \alpha(A)$.

**II. 6) a)** • La fonction $Y \mapsto \|Y\|$ est continue sur $E_p$, donc sur $\mathcal{C}$. Cet ensemble $\mathcal{C}$ étant borné, fermé, non vide, la fonction $Y \mapsto \|Y\|$ est bornée sur $\mathcal{C}$ et atteint ses bornes : elle admet donc un minimum en un point $W \in \mathcal{C}$, ce qui revient à affirmer, pour tout $Y \in \mathcal{C}$ : $\|W\| \le \|Y\|$. La convexité de l'ensemble $\mathcal{C}$ n'intervient pas ici.

**II. 6) b)** • Puisque l'ensemble $\mathcal{C}$ est convexe, on a : $Y_m \in \mathcal{C}$, donc $\|W\| \le \|Y_m\|$, d'où : $\|W\|^2 \le \|Y_m\|^2$, autrement dit : $\|W\|^2 \le \|(1-m)W + mY\|^2 = (1-m)^2\|W\|^2 + 2m(1-m)\langle W, Y\rangle + m^2\|Y\|^2$, ce qui, pour $m \in\ ]0, 1[$, conduit immédiatement à l'inégalité demandée : $\langle W, Y\rangle \ge \dfrac{2-m}{2(1-m)}\|W\|^2 - \dfrac{m}{2(1-m)}\|Y\|^2$.

**II. 6) c)** • Cette inégalité large, étant vraie de tout réel $m \in\ ]0, 1[$, se conserve quand $m \to 0$, $m > 0$, ce qui donne : $\langle W, Y\rangle \ge \|W\|^2$.

**II. 7) a)** • Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in K_n$, soit $\lambda \in [0, 1]$, et soit $X'' = \lambda X + (1-\lambda)X'$, $X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix}$.

Pour $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a : $\lambda x_i + (1-\lambda)x'_i \ge 0$.

De plus, $\sum_{i=1}^{n} x''_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + (1-\lambda)x'_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} x'_i = 1$.

Ainsi, $X'' \in K_n$, ce qui prouve que $K_n$ est convexe.

**II. 7) b)** • Soient $Z \in \mathcal{C}$ et $Z' \in \mathcal{C}$ ; on a : $Z = mA^T X + (1-m)Y$, avec $X \in K_n$, $Y \in K_p$, $m \in [0, 1]$, et : $Z' = m'A^T X' + (1-m')Y'$, avec $X' \in K_n$, $Y' \in K_p$, $m' \in [0, 1]$.

Soit $\lambda \in\ ]0, 1[$ et $Z'' = \lambda Z + (1-\lambda)Z'$. On peut affirmer :

$Z'' = A^T(\lambda mX + (1-\lambda)m'X') + \lambda(1-m)Y + (1-\lambda)(1-m')Y'$, et de plus :

$\lambda m + (1-\lambda)m' + \lambda(1-m) + (1-\lambda)(1-m') = 1$.

Posons : $m'' = \lambda m + (1-\lambda)m'$, d'où : $1 - m'' = \lambda(1-m) + (1-\lambda)(1-m')$. Il est clair que $m'' \in [0, 1]$.

- Si $m = m' = 0$, alors $Z = Y$, $Z' = Y'$, $Z'' = \lambda Y + (1-\lambda)Y'$ est élément de $K_p$, donc de $\mathcal{C}$.

- Si $m = m' = 1$, alors $Z = A^T X$, $Z' = A^T X'$, $Z'' = A^T(\lambda X + (1-\lambda)X')$ est élément de $\mathcal{C}$ car : $\lambda X + (1-\lambda)X' \in K_n$.

- Dans les autres cas, on a : $0 < m'' < 1$. Posons alors : $X'' = \dfrac{\lambda mX + (1-\lambda)m'X'}{m''} = \dfrac{\lambda mX + (1-\lambda)m'X'}{\lambda m + (1-\lambda)m'}$ et :

$Y'' = \dfrac{\lambda(1-m)Y + (1-\lambda)(1-m')Y'}{1-m''} = \dfrac{\lambda(1-m)Y + (1-\lambda)(1-m')Y'}{\lambda(1-m) + (1-\lambda)(1-m')}$. On a : $X'' \in K_n$ et $Y'' \in K_p$ car $K_n$ et $K_p$ sont convexes. Par suite, $Z'' = m''A^T X'' + (1-m'')Y''$ est élément de $\mathcal{C}$, ce qui prouve que cet ensemble $\mathcal{C}$ est convexe.

• Soit encore : Soient $Z \in \mathcal{C}$, en sorte que : $Z = mA^T X + (1-m)Y$, $X \in K_n$, $Y \in K_p$, $m \in [0, 1]$.

La $j$-ème coordonnée du vecteur $A^T X$ est : $(A^T X)_j = \sum_{i=1}^{n} (A^T)_{ji}(X)_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$, d'où :

$|(A^T X)_j| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|x_i \le m\sum_{i=1}^{n} x_i = m$, avec : $m = \underset{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}{\mathrm{Max}}|a_{ij}|$. D'où :

$\|A^T X\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} ((A^T X)_j)^2} \le m\sqrt{p}$. En conséquence,

$\|Z\| = \|mA^T X + (1-m)Y\| \le m\|A^T X\| + (1-m)\|Y\| \le m\sqrt{p} + (1-m)$,

ce qui prouve que l'ensemble $\mathcal{C}$ est borné.

**II. 8) a)** • Dire que $0 \in \mathcal{C}$, c'est dire qu'il existe $X_0 \in K_n$, $Y_0 \in K_p$ et $m \in [0, 1]$, tels que :

$mA^T X_0 + (1-m)Y_0 = 0$. On ne peut avoir : $m = 0$, car ceci impliquerait : $Y_0 = 0$, impossible car $0 \notin K_p$.

On peut donc écrire : $A^T X_0 = -\dfrac{1-m}{m}Y_0 = \mu Y_0$, avec $\mu = -\dfrac{1-m}{m} \le 0$.

**II. 8) b)** • On a : $X_0^T AY = (X_0^T AY)^T = Y^T A^T X_0 = Y^T.\mu Y_0 = \mu\langle Y, Y_0\rangle$. Les vecteurs $Y$ et $Y_0$, étant éléments de $K_p$, sont à coordonnées positives ou nulles, donc leur produit scalaire l'est aussi, et par suite : $X_0^T AY \le 0$.

**II. 8) c)** • Cette inégalité, étant vraie quel que soit $Y \in K_p$, implique : $\underset{Y\in K_p}{\mathrm{Max}}\, X_0^T AY \le 0$, soit : $\lambda(X_0) \le 0$ (question II. 4. a). En conséquence : $\alpha(A) = \underset{X\in K_n}{\mathrm{Min}}\, \lambda(X) \le \lambda(X_0) \le 0$.

**II. 9) a)** • D'après la question II. 6. b, il existe $W \in \mathcal{C}$ tel que, pour tout $Z \in \mathcal{C}$, on ait : $\langle W, Z\rangle \ge \|W\|^2$, ce qui implique, puisque $0 \notin \mathcal{C}$ : $Z^T W = \langle Z, W\rangle = \langle W, Z\rangle \ge \|W\|^2 > 0$. En conséquence, quels que soient $m \in [0, 1]$, $X \in K_n$, $Y \in K_p$, on a : $(mA^T X + (1-m)Y)^T W > 0$, soit : $mX^T AW + (1-m)Y^T W > 0$.

**II. 9) b)** • Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_p)$ la base canonique de $E_p$, où $U_i$ est le vecteur-colonne élément de $E_p$, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne numéro $i$, qui est égal à 1. Il est clair que $U_i \in K_p$. Dans la relation démontrée à la question II. 9. a, faisons : $m = 0$, $Y = U_i$, $X$ quelconque. Il vient : $w_i = \langle U_i, W\rangle = U_i^T W > 0$.

**II. 9) c)** • Dans la relation démontrée à la question II. 9. a, faisons : $m = 1$. On obtient, quel que soit $X \in K_n$ : $X^T AW > 0$.

**II. 9) d)** • On a vu à la question II. 9. b que $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$, avec $w_i > 0$. Soit $S = \sum_{i=1}^{p} w_i$, d'où : $S > 0$, et soit

$W' = \dfrac{1}{S}W = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_p \end{pmatrix}$. Il est clair que $w'_i > 0$, et que $\sum_{i=1}^{p} w'_i = 1$, ce qui prouve que : $W' \in K_p$.

En conséquence : $X^T AW' = \dfrac{1}{S}X^T AW > 0$, quel que soit $X \in K_n$.

**II. 9) e)** • Puisque $X^T AW' > 0$ quel que soit $X \in K_n$, on a : $\underset{X\in K_n}{\mathrm{Min}}(X^T AW') > 0$, d'où :

$\beta(A) = \underset{Y\in K_p}{\mathrm{Max}}\ \underset{X\in K_n}{\mathrm{Min}}(X^T AY) \ge \underset{X\in K_n}{\mathrm{Min}}(X^T AW') > 0$.

**II. 10) a)** • Pour $X \in K_n$ et $Y \in K_p$, on a : $X^T JY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i(J)_{ij}y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} y_j = 1$,

d'où : $X^T BY = X^T AY - \beta(A)X^T JY = X^T AY - \beta(A)$.

On en déduit : $\alpha(B) = \alpha(A) - \beta(A)$, et $\beta(B) = \beta(A) - \beta(A) = 0$.

**II. 10) b)** • Considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ correspondant à la matrice $B$, selon la définition de la question I. 7, autrement dit l'ensemble : $\mathcal{C} = \{mB^T X + (1-m)Y, X \in K_n, Y \in K_p, m \in [0,1]\}$. On peut appliquer à cet ensemble les résultats des questions II. 8 et II. 9, en remplaçant $A$ par $B$.

• Il est impossible que l'on ait : $0 \notin \mathcal{C}$, car d'après la question II. 9. e, ceci impliquerait : $\beta(B) > 0$, or on sait par II. 10. a que $\beta(B) = 0$.

• Il est donc avéré que : $0 \in \mathcal{C}$. Mézalor, la question II. 8. c autorise à en déduire : $\alpha(B) \le 0$, soit : $\alpha(A) - \beta(A) \le 0$, ou : $\alpha(A) \le \beta(A)$.

• Et comme nous avons prouvé en II. 5. a que : $\beta(A) \le \alpha(A)$, force est d'en conclure : $\alpha(A) = \beta(A)$.

## Partie III – Point-selle et point critique

**III. 1)** • On a vu que, pour chaque $X \in K_n$, on a : $\lambda(X) = \underset{Y\in K_p}{\text{Max}}\, f(X,Y)$, et que : $\alpha(A) = \underset{X\in K_n}{\text{Min}}\, \lambda(X)$. Il existe donc $X_0 \in K_n$ tel que $\alpha(A) = \lambda(X_0) = \underset{Y\in K_p}{\text{Max}}\, f(X_0,Y)$, d'où : $\alpha(A) \geq f(X_0,Y)$, quel que soit $Y \in K_p$.

• Posons de même, pour chaque $Y \in K_p$ : $\mu(Y) = \underset{X\in K_n}{\text{Min}}\, f(X,Y)$. On a : $\beta(A) = \underset{Y\in K_p}{\text{Max}}\, \mu(Y)$. Il existe donc $Y_0 \in K_p$ tel que $\beta(A) = \mu(Y_0) = \underset{X\in K_n}{\text{Min}}\, f(X,Y_0)$, d'où : $\beta(A) \leq f(X,Y_0)$, quel que soit $X \in K_n$.

• Comme $\alpha(A) = \beta(A)$, on a ainsi prouvé, pour tout $(X,Y)\in K_n \times K_p$ : $f(X_0,Y) \leq \alpha(A) = \beta(A) \leq f(X,Y_0)$.
Puisque $f(X_0,Y) \leq f(X,Y_0)$ quels que soient $X \in K_n$ et $Y \in K_p$, cette inégalité est encore vraie pour $Y = Y_0$, $X$ quelconque, puis pour $X = X_0$, $Y$ quelconque, ce qui donne : $f(X_0,Y) \leq f(X_0,Y_0) \leq f(X,Y_0)$, pour tout $(X,Y)\in K_n \times K_p$.

• *Réciproquement*, supposons qu'il existe $X_0 \in K_n$ et $Y_0 \in K_p$ tels que, quel que soit $(X,Y)\in K_n \times K_p$, on ait : $f(X_0,Y) \leq f(X_0,Y_0) \leq f(X,Y_0)$. L'inégalité : $f(X_0,Y) \leq f(X_0,Y_0)$, vraie pour tout $Y \in K_p$, signifie :
$f(X_0,Y_0) = \underset{Y\in K_p}{\text{Max}}\, f(X_0,Y) = \lambda(X_0) \geq \underset{X\in K_n}{\text{Min}}\, \lambda(X) = \alpha(A)$.
De même, l'inégalité : $f(X_0,Y_0) \leq f(X,Y_0)$, vraie pour tout $X \in K_n$, signifie :
$f(X_0,Y_0) = \underset{X\in K_n}{\text{Min}}\, f(X,Y_0) = \mu(Y_0) \leq \underset{Y\in K_p}{\text{Max}}\, \mu(Y) = \beta(A)$.
D'où il suit : $\alpha(A) \leq f(X_0,Y_0) \leq \beta(A)$, et comme $\alpha(A) = \beta(A)$, finalement : $f(X_0,Y_0) = \alpha(A)$.

**III. 2) a)** • On a : $g(x,y) = X^T AY = (x \;\; 1-x)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = x((a-b)y+b) + (1-x)((c-d)y+d)$

$= (a-b-c+d)xy + (b-d)x + (c-d)y + d.$

D'où : $\dfrac{\partial g}{\partial x} = (a+d-b-c)y + (b-d)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = (a+d-b-c)x + (c-d)$.

• Si $a+d-b-c \neq 0$, alors la fonction $g$ admet un unique point critique :

$$x_0 = \frac{d-c}{a+d-b-c},\; y_0 = \frac{d-b}{a+d-b-c}.$$

• Si $a+d-b-c = 0$, alors : $\dfrac{\partial g}{\partial x} = b-d$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = c-d$, constantes. Dans ce cas, tout point est critique si $b = d$ et $c = d$, et sinon, il n'y a pas de point critique.

**III. 2) b)** • On suppose $a-b$ et $d-c$ de même signe et non tous deux nuls, ainsi que $a-c$ et $d-b$.
Il en résulte : $a+d-b-c = (a-b)+(d-c) = (a-c)+(d-b) \neq 0$, et la fonction $g$ admet un unique point critique : $x_0 = \dfrac{d-c}{(a-b)+(d-c)} \geq 0$, $y_0 = \dfrac{d-b}{(a-c)+(d-b)} \geq 0$.

• D'où : $1-x_0 = \dfrac{a-b}{(a-b)+(d-c)} \geq 0$, et : $1-y_0 = \dfrac{d-b}{(a-c)+(d-b)} \geq 0$, ce qui prouve que : $(x_0,y_0)\in[0,1]^2$.

• Soit : $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}$.

Soit : $U = X - X_0 = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ x_0-x \end{pmatrix} = (x-x_0)K$, où $K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Et soit enfin : $V = Y - Y_0 = \begin{pmatrix} y-y_0 \\ y_0-y \end{pmatrix} = (y-y_0)K$.

On a : $g(x,y) = X^T AY = (X_0+U)^T A(Y_0+V) = (X_0{}^T + U^T)A(Y_0+V) = \ldots$

$= X_0{}^T AY_0 + X_0{}^T AV + U^T AY_0 + U^T AV.$

Le calcul montre que : $X_0{}^T AV + U^T AY_0 = (x-x_0)X_0{}^T AK + (y-y_0)K^T AY_0 = 0$, et :
$U^T AV = (x-x_0)(y-y_0)K^T AK = (x-x_0)(y-y_0)(a+d-b-c)$.
Il en résulte : $g(x,y) = g(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)(a+d-b-c)$

• En conséquence : $g(x_0,y) = g(x_0,y_0) = g(x,y_0)$, ce qui prouve que $(X_0,Y_0)$ est un point-selle pour l'application $f(X,Y) = X^T AY = g(x,y)$.
• Conclusion finale : $\alpha(A) = f(X_0,Y_0) = g(x_0,y_0) =$

$$\frac{(d-b)(d-c)}{a+d-b-c} + \frac{(b-d)(d-c)}{a+d-b-c} + \frac{(c-d)(d-b)}{a+d-b-c} + \frac{d(a+d-b-c)}{a+d-b-c} = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}.$$

## Partie IV
## Application à un problème de concurrence

**IV) 1)** • Puisque l'entente est impossible, les deux concurrents choisissent indépendamment leur stratégie, et les probabilités que la variation trimestrielle soit $-2$, 3, 1, $-1$ sont respectivement : $xy$, $x(1-y)$, $(1-x)y$, $(1-x)(1-y)$, en sorte que l'espérance de cette variation est :
$V_{x,y} = -2xy + 3x(1-y) + 1.(1-x)y + (-1)(1-x)(1-y) = -7xy + 4x + 2y - 1$.

**IV. 2)** • Remplaçons les données du tableau $-2$, 3, 1, $-1$ respectivement par $a$, $b$, $c$, $d$. Ledit tableau s'interprète comme la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a : $V_{x,y} = axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y)$

$$= x(ay + b(1-y)) + (1-x)(cy + d(1-y)) = (x \;\; 1-x)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix},$$

qui n'est autre que la fonction $g(x,y)$ étudiée à la partie III.

• La matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de cette partie IV satisfait bien aux conditions de la question III. 2. b (les réels $a-b$ et $d-c$ de même signe et non tous deux nuls, ainsi que $a-c$ et $d-b$).
*Remarque*. La condition « de même signe » signifie qu'aucun des concurrents ne dispose d'une stratégie plus favorable qu'une autre, et la condition « non tous deux nuls » signifie que les stratégies distinctes se traduisent par des résultats distincts.
• On peut donc appliquer les résultats de la partie III, et le point-selle $(x_0,y_0)$ fournit les choix aléatoires optimaux de stratégies pour nos deux concurrents : $x_0 = \dfrac{d-c}{a+d-b-c} = \dfrac{2}{5}$, $y_0 = \dfrac{d-b}{a+d-b-c} = \dfrac{4}{5}$.

*R. C.*

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES**
**E.S.C.P. – E.A.P.**
**ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

**OPTION SCIENTIFIQUE**

# MATHEMATIQUES II

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles. L'espérance d'une variable aléatoire $X$ est notée $\mathbf{E}(X)$.
**On admet** les résultats suivants :
i) si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires possédant une espérance et vérifiant l'inégalité $X \leqslant Y$ (c'est-à-dire vérifiant $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ pour tout élément $\omega$ de $\Omega$) alors on a l'inégalité : $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
ii) Étant donné une fonction $f$ continue sur $[0, +\infty[$ et une variable aléatoire $Y$ possédant une densité $\varphi$ continue sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0[$, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u)\,\varphi(u)\,du$ converge absolument alors la variable aléatoire $f(Y)$ possède une espérance vérifiant $\mathbf{E}\big(f(Y)\big) = \int_0^{+\infty} f(u)\,\varphi(u)\,du$.

## Partie I Définition de l'application $L$

On note $E$ l'ensemble des fonctions $f$ réelles définies, continues sur $[0, +\infty[$ et telles que, pour tout réel $x$ strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ converge absolument.

1) a) Vérifier que $E$ est un espace vectoriel réel.
b) Vérifier que $E$ contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$.

2) Pour tout élément $f$ de $E$ on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel $x$ strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$$

a) Vérifier que $L$ est une application linéaire de $E$ dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
b) Pour tout réel $\lambda$ positif ou nul, on note $\varepsilon_\lambda$ la fonction réelle définie par $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel $t$ positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel $\lambda$ positif ou nul, la fonction $\varepsilon_\lambda$ est dans $E$ et, pour tout réel $x$ strictement positif, calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$.
c) Montrer que, pour tout réel $\lambda$ positif ou nul et toute fonction $f$ de $E$, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est aussi dans $E$ et vérifie, pour tout réel $x$ strictement positif, l'égalité : $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda)$.

3) On considère une fonction $H$ élément de $E$, de classe $C^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction $H'$ est aussi dans $E$ et, pour tout réel $x$ strictement positif, justifier l'égalité :

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x)$$

4) Soit une fonction $f$ élément de $E$. Pour tout entier naturel $n$, montrer que la fonction qui à tout réel $t$ positif ou nul associe $t^n f(t)$ est aussi élément de $E$.

## Partie II Dérivabilité de la fonction $L(f)$

Dans toute cette partie on considère un réel $x$ strictement positif et une fonction $f$ élément de $E$.

1) Soit $h$ un réel non nul vérifiant l'inégalité $|h| < \dfrac{x}{2}$.

a) Pour tout réel $t$ strictement positif, justifier l'inégalité : $\left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + h\,t\,e^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{h^2 t^2}{2} e^{-xt/2}$.
b) Pour tout réel $T$ strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left|\int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + t\,e^{-xt} f(t)\right) dt\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2\,|f(t)|\,e^{-xt/2}\,dt$$

c) En déduire que $L(f)$ est dérivable en $x$ et que son nombre dérivé en $x$ vaut :

$$\big(L(f)\big)'(x) = -\int_0^{+\infty} t f(t)\,e^{-xt}\,dt$$

d) Montrer que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout entier naturel $k$, donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée $k$-ième de $L(f)$ en $x$.

## Partie III Injectivité de l'application $L :\ f \longmapsto L(f)$

Dans toute cette partie on considère un réel $x$ strictement positif et une fonction $f$ continue et bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$. *Ainsi $f$ est élément de $E$.*

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\dfrac{1}{x}$ (donc d'espérance $x$). Pour tout entier naturel $n$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Donner une densité de la variable aléatoire $S_n$.
b) Donner une densité, qu'on notera $\varphi_n$, de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$.

2) a) Soit $\alpha$ un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]\right) = 0$$

b) En utilisant la continuité de la fonction $f$ en $x$, pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, justifier l'existence d'un réel $\alpha$ strictement positif tel que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\left[\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]$$

c) Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$$

3) On note $M$ un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$.

a) Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Pour tout entier naturel $n$, on note $A_n$ l'événement :

$$A_n = \left[\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

et $\mathbf{1}_{A_n}$ son indicatrice. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\,\mathbf{1}_{A_n} + 2M\,(1 - \mathbf{1}_{A_n})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\Big(f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big) = f(x)$$

4) a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) \mathrm{e}^{-nt/x} \,\mathrm{d}t$$

puis l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n\,(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,x^n} \Big(L(f)\Big)^{(n-1)}\Big(\frac{n}{x}\Big)$$

b) Montrer que si deux fonctions $f$ et $g$ continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifient $L(f) = L(g)$ alors $f$ et $g$ sont égales.

c) Montrer, plus précisement, que si deux fonctions $f$ et $g$ continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifient $L(f)(x) = L(g)(x)$ seulement pour tout $x$ dans $]a,+\infty[$ (où $a$ est positif ou nul) alors $f$ et $g$ sont encore égales.

## Partie IV Étude du régime permanent d'une file d'attente

Un certain jour des clients arrivent dans une poste ne possédant qu'un seul guichet. Un client qui arrive dans la poste soit se fait servir tout de suite si le guichet est libre, soit prend place dans la file d'attente si le guichet est occupé, se fait servir dès que tous ses prédécesseurs dans la file ont été servis et quitte aussitôt la poste. On modélise cette situation en notant, pour tout entier naturel $n$ non nul, $T_n$ l'instant (aléatoire) d'arrivée dans la poste du $n$-ième client, $U_n$ sa durée d'attente (aléatoire) dans la file ($U_n = 0$ si le guichet est libre), $S_n$ la durée (aléatoire) de son service au guichet et $W_n = U_n + S_n$ la durée de présence dans la poste.

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$ et on a alors $T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$.

On fait les hypothèses suivantes :

i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ sont indépendantes ;

ii) les variables aléatoires $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\mu$ (d'espérance égale à $\dfrac{1}{\mu}$) ;

iii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ sont **strictement** positives et ont toutes la même densité égale sur $]0,+\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda$ (d'espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$) ;

iv) l'espérance commune des $\Delta_i$ est supérieure à celle des $S_i$ c'est-à-dire : $\mu > \lambda$.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $F_n$ la fonction de répartition de $U_n$ et $G_n$ celle de $W_n$. On **admet** que $F_n$ et $G_n$ sont continues sur $[0,+\infty[$.

Dans les trois premières questions de cette partie on considère un entier $n$ au moins égal à 2, un réel $x$ positif ou nul et un réel $h$ strictement positif.

1) Justifier les égalités : $U_n = 0$ si $W_{n-1} - \Delta_n < 0$ et $U_n = W_{n-1} - \Delta_n$ sinon.

2) Justifier l'indépendance des variables aléatoires $W_{n-1}$ et $\Delta_n$.

3) a) Pour tout entier naturel $k$, justifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} \leqslant x + (k+1)h\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

puis l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) \,\mathrm{d}s$$

b) Pour tout entier naturel $k$ non nul, justifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} \leqslant x + kh\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

puis l'inégalité :

$$\mathrm{e}^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) \,\mathrm{d}s \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

c) En déduire l'encadrement :

$$\mathrm{e}^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) \,\mathrm{d}s \leqslant F_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) \,\mathrm{d}s$$

4) Soit $x$ un réel positif ou nul. En utilisant l'encadrement précédent, établir l'égalité :

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) \,\mathrm{d}s$$

En raisonnant de la même façon on montrerait et on **admettra** l'égalité :

$$G_n(x) = \int_0^{x} \mu \mathrm{e}^{-\mu s} F_{n-1}(x-s) \,\mathrm{d}s$$

5) On fait désormais, et jusqu'à la fin du problème, l'hypothèse que les fonctions $F_n$ et $G_n$ sont indépendantes de $n$ et on note $F$ et $G$ les fonctions vérifiant, pour tout entier naturel $n$ non nul, $F = F_n$ et $G = G_n$. *On dit alors qu'on étudie la file d'attente en régime permanent.*

a) Pour tout réel $x$ positif ou nul, établir l'égalité :

$$F(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, G(t) \,\mathrm{d}t - \int_0^{x} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, G(t) \,\mathrm{d}t\Big)$$

b) En déduire, pour tout réel $x$ positif ou nul, l'égalité :

$$\mathrm{e}^{-\lambda x} F(x) = F(0) - \lambda \int_0^{x} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, G(t) \,\mathrm{d}t$$

6) a) Montrer que la fonction $H : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, G(t) \,\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$.

Pour tout réel $x$ strictement positif, établir l'égalité : $xL(H)(x) = L(G)(x+\lambda)$.

b) Montrer que pour tout réel $x$ vérifiant $x > \lambda$, on a l'égalité :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{x-\lambda} - \frac{\lambda}{x-\lambda} L(G)(x)$$

7) Montrer que la fonction $G$ est de classe $C^1$, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Pour tout réel $x$ strictement positif, établir successivement les égalités :

$$G'(x) = -\mu G(x) + \mu F(x) \quad \text{et} \quad L(G)(x) = \frac{\mu}{x+\mu} L(F)(x)$$

8) a) Pour tout réel $x$ vérifiant $x > \lambda$, justifier l'égalité :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda}\Big(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x + \mu - \lambda}\Big)$$

b) Pour tout réel $x$ positif ou nul, en déduire l'égalité :

$$F(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda}\Big(\mu - \lambda\,\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)x}\Big)$$

c) Justifier que la fonction $F$ admet la limite 1 en $+\infty$ et en déduire, pour tout réel $x$ positif ou nul, l'égalité :

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}\,\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)x}$$

9) a) Montrer que, en régime permanent, le temps passé dans la poste suit une loi exponentielle de paramètre égal à $\mu - \lambda$.

b) On suppose qu'un autre jour les arrivées des clients sont en moyenne deux fois plus fréquentes et la durée de service deux fois plus rapide. Que deviennent, en régime permanent, le temps moyen passé dans la poste par un client et la probabilité d'être servi tout de suite ?

# Partie I
## Définition de l'application L

**I. 1) a)** • L'ensemble $E$ est non vide puisque la fonction nulle est élément de cet ensemble. Si deux fonctions $f$ et $g$ sont éléments de cet ensemble, alors toute combinaison linéaire de ces deux fonctions, à coefficients réels, l'est aussi. En effet, pour tout réel $x > 0$, on a : $\left|e^{-xt}(\lambda f(t) + \mu g(t))\right| \leq |\lambda|\left|e^{-xt} f(t)\right| + |\mu|\left|e^{-xt} g(t)\right|$. L'ensemble $E$ est donc un espace vectoriel réel.

**I. 1) b)** • Si une fonction $f$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit $t \in [0, +\infty[$, on ait : $|f(t)| \leq M$. Pour tout $x$ réel, on a : $0 \leq \left|e^{-xt} f(t)\right| \leq Me^{-xt}$. Si de plus $x > 0$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} Me^{-xt}\,dt$ converge, et il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ converge absolument.

**I. 2) a)** • A toute fonction $f \in E$, on associe $L(f)$, qui est une application (une fonction) de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On a donc défini une application $L$ de l'espace vectoriel $E$ dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Les propriétés de linéarité de l'intégrale prouvent immédiatement que cette application est linéaire.

**I. 2) b)** • Pour tout réel $\lambda \geq 0$, la fonction $\varepsilon_\lambda : t \mapsto e^{-\lambda t}$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, et elle est donc élément de $E$ d'après la question I. 1. b.

• Pour tout réel $x > 0$, on a : $L(\varepsilon_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t}\,dt = \dfrac{1}{x+\lambda}$.

**I. 2) c)** • Il est clair que : $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$, sous réserve de convergence absolue de cette intégrale. Pour tout réel $\lambda \geq 0$, on a : $0 \leq \left|e^{-xt}e^{-\lambda t} f(t)\right| = e^{-xt}e^{-\lambda t}|f(t)| \leq e^{-xt}|f(t)| = \left|e^{-xt} f(t)\right|$, ce qui implique que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ converge absolument, soit : $\varepsilon_\lambda f \in E$.

• On a alors : $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}e^{-\lambda t} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} f(t)\,dt = L(f)(x+\lambda)$.

**I. 3)** • Soit une fonction $H \in E$, de classe $C^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$, et soit un réel $T > 0$. Exécutons une intégration par parties sur : $\int_0^T e^{-xt} H'(t)\,dt$, avec : $u(t) = e^{-xt}$ et $v'(t) = H'(t)$, d'où : $u'(t) = -xe^{-xt}$ et $v(t) = H(t)$. Il vient : $\int_0^T e^{-xt} H'(t)\,dt = [e^{-xt} H(t)]_{t=0}^{t=T} + \int_0^T xe^{-xt} H(t)\,dt = e^{-xT} H(T) - H(0) + x\int_0^T e^{-xt} H(t)\,dt$.

Puisque $x > 0$ et que la fonction $H$ est bornée, on a : $\lim\limits_{T \to +\infty} e^{-xT} H(T) = 0$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} H'(t)\,dt$ converge, et que : $\int_0^{+\infty} e^{-xt} H'(t)\,dt = -H(0) + x\int_0^{+\infty} e^{-xt} H(t)\,dt = -H(0) + xL(H)(x)$.

• Comme la fonction $H$ est croissante, sa dérivée $H'$ est positive, et la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} H'(t)\,dt$ équivaut à sa convergence absolue. Ceci prouve que $H' \in E$, et l'intégrale que nous venons de calculer se traduit par : $L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x)$.

**I. 4)** • Pour chaque réel $x > 0$, on a : $t^n << e^{xt/2}$ quand $t \to +\infty$, d'où : $e^{-xt} t^n |f(t)| << e^{-xt/2}|f(t)|$, et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt/2}|f(t)|\,dt$ converge, il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^n |f(t)|\,dt$ converge aussi, ce qui signifie que la fonction : $t \mapsto t^n f(t)$ est élément de $E$.

# Partie II
## Dérivabilité de la fonction L(f)

**II. 1) a)** • Soit $\varphi(x) = e^{-x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où : $\varphi'(x) = -e^{-x}$, $\varphi''(x) = e^{-x}$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et $x$ se traduit par :

$\left|\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)\right| \leq \dfrac{x^2}{2} M_2$, où $M_2 = \underset{0 \leq t \leq x}{Max}|\varphi''(t)|$ si $x > 0$ et $M_2 = \underset{x \leq t \leq 0}{Max}|\varphi''(t)|$ si $x < 0$.

Dans le premier cas, $M_2 = 1$ et dans le second cas, $M_2 = e^{-x} = e^{|x|}$. Dans les deux cas : $M_2 \leq e^{|x|}$.

Il est ainsi prouvé, pour tout réel $x$ : $\left|e^{-x} - 1 + x\right| \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$ (trivial pour $x = 0$).

• Si l'on suppose désormais : $x > 0$, $0 < |h| < \dfrac{x}{2}$, $t > 0$, alors : $\left|e^{-ht} - 1 + ht\right| \leq \dfrac{h^2 t^2}{2} e^{|h|t}$. En multipliant les deux membres par le réel positif $e^{-xt}$, il vient : $\left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right| \leq \dfrac{h^2 t^2}{2} e^{(|h|-x)t} \leq \dfrac{h^2 t^2}{2} e^{-xt/2}$.

**II. 1) b)** • Sous les hypothèses faites sur $x$, $h$, $t$, l'inégalité précédente implique :

$\left|\dfrac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t)\right| \leq \dfrac{|h|}{2} t^2 |f(t)| e^{-xt/2}$, d'où pour $T > 0$ :

$$\left|\int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t)\right)dt\right| \leq \int_0^T \left|\left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t)\right)\right|dt \leq \ldots$$

$$\leq \int_0^T \frac{|h|}{2} t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt = \frac{|h|}{2}\int_0^T t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt,$$

cette dernière intégrale étant convergente parce que $f \in E$ (question I. 4).

**II. 1) c)** • Les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-(x+h)t} f(t)\,dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$, et $\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\,dt$ sont absolument convergentes parce que $f \in E$ et que $x > 0$, $0 < |h| < \dfrac{x}{2}$, ce qui implique : $x + h > 0$.

• En passant à la limite quand $T \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$\left|\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\,dt\right| \leq \dfrac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt$, soit :

$\left|\dfrac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} + \int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\,dt\right| \leq \dfrac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt$.

• En passant à la limite quand $h \to 0$ dans cette dernière inégalité, on obtient :

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\,dt$, ce qui prouve que la fonction $L(f)$ est dérivable en $x$, et que son nombre dérivé est : $(L(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\,dt$.

**II. 1) d)** • Posons $u(t) = t$, il vient : $(L(f))' = L(-uf)$, ce qui prouve que cette dérivée est dérivable, et que : $(L(f))'' = L(-uf)' = L(u^2 f)$, et ainsi de suite. On vérifie immédiatement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $L(f)$ est $n$ fois dérivable, et que : $L(f)^{(n)} = L((-u)^n f)$, ce qui signifie :

$(L(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} f(t)\,dt$.

# Partie III
## Interjectivité de l'application L

**III. 1) a)** • Une variable aléatoire $X$ suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, admet pour densité : $f_X(t) = 0$ si $x < 0$ et $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on sait que la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ admet pour densité : $f_{S_n}(t) = 0$ si $x < 0$ et $f_{S_n}(t) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$ si $x \geq 0$. Dans le cas présent, il faut remplacer le paramètre $\lambda$ par $\dfrac{1}{x}$.

**III. 1) b)** • La fonction de répartition $F_{S_n/n}$ de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$ vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$F_{S_n/n}(t) = P(\dfrac{S_n}{n} \leq t) = P(S_n \leq nt) = F_{S_n}(nt)$. En tout point $t \in \mathbb{R}$ où cette fonction est dérivable, autrement dit pour $t \neq 0$, on a donc la densité : $\varphi_n(t) = f_{S_n/n}(t) = F'_{S_n/n}(t) = nF'_{S_n}(nt) = nf_{S_n}(nt)$. On trouve ainsi : $\varphi_n(t) = 0$ si $t < 0$ et $\varphi_n(t) = \dfrac{n^n}{(n-1)!x^n} t^{n-1} e^{-nt/x}$ si $t > 0$. Pour $t = 0$, on prend la valeur que l'on veut, par exemple celle qui rend la densité continue à droite : pour $n = 1$, on prend la valeur $\dfrac{1}{x}$, et pour $n \geq 2$, on prend la valeur 0, qui rend cette densité continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**III. 2) a)** • On a : $\mathbf{E}(X_k) = x$, d'où : $\mathbf{E}(\dfrac{S_n}{n}) = x$, et la loi faible des grands nombres permet d'affirmer, pour tout réel $\alpha > 0$ : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| > \alpha]) = 0$.

**III. 2) b)** • Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, quel que soit $y \in \mathbb{R}$, on ait : $|y - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. En particulier, ceci implique, pour tout entier $n \geq 1$ :
$[\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \leq \alpha] \subset [\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| \leq \varepsilon]$. En passant aux événements contraires, on en déduit :
$[\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| > \varepsilon] \subset [\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| > \alpha]$.

**III. 2) c)** • De la question précédente, il résulte : $0 \leq \mathbf{P}([\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| > \varepsilon]) \leq \mathbf{P}([\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| > \alpha])$ et d'après le théorème d'encadrement, dit « des gendarmes », on peut en déduire : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| > \varepsilon]) = 0$.

**III. 3) a)** • La variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_n}$ vaut 1 si l'événement $A_n = [\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| \leq \varepsilon]$ est réalisé, et 0 sinon.

• Si l'événement $A_n$ est réalisé, alors $\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| \leq \varepsilon$, et $\varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n}) = \varepsilon$.

• Si l'événement $A_n$ n'est pas réalisé, alors : $\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| \leq \left|f(\dfrac{S_n}{n})\right| + |f(x)| \leq 2M$, et :
$\varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n}) = 2M$.

• Dans les deux cas : $\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| \leq \varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n})$.

**III. 3) b)** • Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles ayant chacune une espérance, et telles que : $X \leq Y$, alors on a : $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.

• Si $X$ est une variable aléatoire réelle ayant une espérance, alors : $-|X| \leq X \leq |X|$, d'où : $-\mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(|X|)$, autrement dit : $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$. Il en résulte : $\left|\mathbf{E}(f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x))\right| \leq \mathbf{E}(\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right|)$,

soit : $\left|\mathbf{E}(f(\dfrac{S_n}{n})) - f(x)\right| \leq \mathbf{E}(\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right|)$.

• Par ailleurs, on a : $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n}) = \mathbf{P}(A_n)$, d'où : $\mathbf{E}(\varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n})) = \varepsilon \mathbf{P}(A_n) + 2M(1 - \mathbf{P}(A_n))$.

L'événement $A_n$ est l'événement contraire de : $[\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right| > \varepsilon]$, dont la probabilité tend vers 0 quand $n \to +\infty$, de par la question III. 2. c. En conséquence : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier positif $N$ tel que, quel que soit $n \geq N$, on ait : $0 \leq 1 - \mathbf{P}(A_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2M+1}$.

• En regroupant tous ces résultats, on peut conclure, pour $n \geq N$ :
$\left|\mathbf{E}(f(\dfrac{S_n}{n})) - f(x)\right| \leq \mathbf{E}(\left|f(\dfrac{S_n}{n}) - f(x)\right|) \leq \mathbf{E}(\varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n})) = \varepsilon \mathbf{P}(A_n) + 2M(1 - \mathbf{P}(A_n)) \leq \varepsilon$,

ce qui signifie clairement : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(f(\dfrac{S_n}{n})) = f(x)$.

**III. 4) a)** • On a vu à la question III. 1. que la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$ admet pour densité la fonction $\varphi_n$ définie par : $\varphi_n(t) = 0$ si $t < 0$, et $\varphi_n(t) = \dfrac{n^n}{(n-1)!x^n} t^{n-1} e^{-nt/x}$ si $t \geq 0$.

En conséquence : $\mathbf{E}(f(\dfrac{S_n}{n})) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t) \dfrac{n^n}{(n-1)!x^n} t^{n-1} e^{-nt/x} dt$, car il est clair que cette intégrale converge absolument puisque la fonction $f$ est bornée. Le résultat de la question III. 3. b. se traduit alors par : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} f(t) t^{n-1} e^{-nt/x} dt = f(x)$.

**III. 4) b)** • D'après la question II. 1. d, on a : $L(f)^{(n-1)}(\dfrac{n}{x}) = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-nt/x} f(t)dt$, et la limite précédente s'écrit : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} (L(f))^{(n-1)}(\dfrac{n}{x}) = f(x)$.

**III. 4) c)** • La question précédente donne une expression de $f(x)$ en fonction de $L(f)(x)$, pour $x > 0$. La valeur de $f(0)$ en découle car : $f(0) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x)$, puisque la fonction $f$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ceci prouve que la donnée de $L(f)$ détermine $f$, du moins sous les hypothèses de cette partie III : fonction $f$ continue et bornée sur $[0, +\infty[$. Il en résulte à l'évidence que si deux fonctions $f$ et $g$ continues et bornées sur $[0, +\infty[$ vérifient : $L(f) = L(g)$, alors : $f = g$.

**III. 4) d)** • Pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$, on a : $L(f)(a + x) = L(g)(a + x)$, ce qui s'écrit, d'après la question I. 2. c :
$L(\varepsilon_a f)(x) = L(\varepsilon_a g)(x)$, soit : $L(\varepsilon_a f) = L(\varepsilon_a g)$ (rappel : $\varepsilon_a(x) = e^{-ax}$). Les fonctions $\varepsilon_a f$ et $\varepsilon_a g$ étant continues et bornées, on en déduit : $\varepsilon_a f = \varepsilon_a g$, d'où : $f = g$, car la fonction $\varepsilon_a$ ne s'annule jamais

# Partie IV

## Étude du régime permanent d'une file d'attente

**IV. 1)** • La variable $\Delta_n$ est la durée du temps qui s'écoule entre l'arrivée du ($n$–1)-ème client et celle du $n$-ème.

• L'inégalité : $W_{n-1} - \Delta_n < 0$, ou $\Delta_n > W_{n-1}$, signifie donc que le $n$-ème client arrive après que le ($n$–1)-ème est sorti de la poste, et qu'il n'a donc pas à attendre : $U_n = 0$.

• Si l'on a au contraire : $W_{n-1} - \Delta_n > 0$, ou $\Delta_n < W_{n-1}$, cela signifie que le $n$-ème client arrive alors que le ($n$–1)-ème est encore dans la poste, et cette différence positive $W_{n-1} - \Delta_n$ donne le temps d'attente de ce $n$-ème client : $W_{n-1} - \Delta_n = U_n$.

**IV. 2)** • La variable aléatoire $W_{n-1}$, qui est la durée de présence dans la poste du ($n$–1)-ème client, ne dépend que des instants d'arrivée et des attentes des clients précédents : c'est donc une fonction de $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$, $S_1, S_2, ..., S_{n-1}$, et elle est donc indépendante de $\Delta_n$.

**IV. 3) a)** • Les deux inégalités : $W_{n-1} - \Delta_n \le x$ et $kh \le \Delta_n < (k+1)h$ impliquent à l'évidence :
$W_{n-1} \le x + \Delta_n \le x + (k+1)h$. On a donc l'implication logique :
$W_{n-1} - \Delta_n \le x$ et $kh \le \Delta_n < (k+1)h \Rightarrow W_{n-1} \le x + (k+1)h$ et $kh \le \Delta_n < (k+1)h$,
qui se note aussi, en termes d'événements :
$[W_{n-1} - \Delta_n \le x] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h] \subset [W_{n-1} \le x + (k+1)h] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h]$, d'où l'inégalité :
$\mathbf{P}([W_{n-1} - \Delta_n \le x] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h]) \le \mathbf{P}([W_{n-1} \le x + (k+1)h] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h])$.

• L'indépendance des variables aléatoires $W_{n-1}$ et $\Delta_n$ permet d'affirmer :
$\mathbf{P}([W_{n-1} \le x + (k+1)h] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h]) = \mathbf{P}([W_{n-1} \le x + (k+1)h])\mathbf{P}([kh \le \Delta_n < (k+1)h])$
$= G_{n-1}(x + (k+1)h)\int_{kh}^{(k+1)h} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$. Le changement de variable : $t = s - h$ transforme cette quantité en :
$G_{n-1}(x + (k+1)h)\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda(s-h)}\,ds = e^{\lambda h}\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + (k+1)h)\,ds$

La fonction de répartition $G_{n-1}$ étant croissante, on a enfin :
$e^{\lambda h}\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + (k+1)h)\,ds \le e^{\lambda h}\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s)\,ds$. *CQFD.*

**IV. 3) b)** • *Bis repetita placent.* Les deux inégalités : $W_{n-1} \le x + kh$ et $kh \le \Delta_n < (k+1)h$ impliquent à l'évidence : $W_{n-1} \le x + \Delta_n$, soit : $W_{n-1} - \Delta_n \le x$. On a donc l'implication logique :
$W_{n-1} \le x + kh$ et $kh \le \Delta_n < (k+1)h \Rightarrow W_{n-1} - \Delta_n \le x$ et $kh \le \Delta_n < (k+1)h$,
qui se note aussi, en termes d'événements :
$[W_{n-1} \le x + kh] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h] \subset [W_{n-1} - \Delta_n \le x] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h]$, d'où l'inégalité :
$\mathbf{P}([W_{n-1} \le x + kh] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h]) \le \mathbf{P}([W_{n-1} - \Delta_n \le x] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h])$.

• L'indépendance des variables aléatoires $W_{n-1}$ et $\Delta_n$ permet d'affirmer :
$\mathbf{P}([W_{n-1} \le x + kh] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h]) = \mathbf{P}([W_{n-1} \le x + kh])\mathbf{P}([kh \le \Delta_n < (k+1)h])$
$= G_{n-1}(x + kh)\int_{kh}^{(k+1)h} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$. Le changement de variable : $t = s + h$ transforme cette quantité en :
$G_{n-1}(x + kh)\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda(s+h)}\,ds = e^{-\lambda h}\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + kh)\,ds$

La fonction de répartition $G_{n-1}$ étant croissante, on a enfin :
$e^{-\lambda h}\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + kh)\,ds \ge e^{\lambda h}\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s)\,ds$. *CQFD.*

**IV. 3) c)** • On a : $[W_{n-1} - \Delta_n \le x] = \bigcup_{k=0}^{+\infty}([W_{n-1} - \Delta_n \le x] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h])$, d'où :

$\mathbf{P}([W_{n-1} - \Delta_n \le x]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([W_{n-1} - \Delta_n \le x] \cap [kh \le \Delta_n < (k+1)h])$.

• Il résulte donc de IV. 3. a :
$\mathbf{P}([W_{n-1} - \Delta_n \le x]) \le e^{\lambda h}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds = e^{\lambda h}\int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds$,
cette dernière intégrale étant convergente parce que la fonction de répartition $G_{n-1}$ est bornée.

• De même, il résulte de IV. 3. b :
$\mathbf{P}([W_{n-1} - \Delta_n \le x]) \ge e^{-\lambda h}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds = e^{-\lambda h}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds$.

• Par ailleurs, il est clair que : $[U_n \le x] = ([U_n \le x] \cap [W_{n-1} - \Delta_n < 0]) \cup ([U_n \le x] \cap [W_{n-1} - \Delta_n \ge 0])$, d'où d'après IV. 1 : $[U_n \le x] = [W_{n-1} - \Delta_n < 0] \cup ([W_{n-1} - \Delta_n \le x] \cap ([W_{n-1} - \Delta_n \ge 0]$
$= [W_{n-1} - \Delta_n < 0] \cup [0 \le W_{n-1} - \Delta_n \le x] = [W_{n-1} - \Delta_n \le x]$, ce qui achève la démonstration de l'encadrement demandé : $e^{-\lambda h}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds \le \mathbf{P}([U_n \le x]) \le e^{\lambda h}\int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds$.

**IV. 4)** • La fonction : $h \mapsto \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds - \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds$ est de classe $C^1$, donc continue sur $[0, +\infty[$, d'où : $\lim_{n \to +\infty} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds$. En passant à la limite quand $h \to 0$, $h > 0$, dans le premier et le troisième membre de l'encadrement de la question IV. 3. c, on obtient, en vertu du théorème d'encadrement des limites (dit des gendarmes) : $F_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds$.

**IV. 5) a)** • L'égalité : $F(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G(x+s)\,ds$, conséquence de la question IV. 4, devient, par changement de variable $t = s + x$ :
$F(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G(x+s)\,ds = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(t-x)} G(t)\,dt = \lambda e^{\lambda x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)\,dt - \int_0^x e^{-\lambda t} G(t)\,dt\right)$.

**IV. 5) b)** • Cette dernière égalité donne, pour $x = 0$ : $F(0) = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)\,dt$. Par ailleurs, il est clair qu'elle implique : $e^{-\lambda x}F(x) = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)\,dt - \lambda\int_0^x e^{-\lambda t} G(t)\,dt = F(0) - \lambda\int_0^x e^{-\lambda t} G(t)\,dt$.

**IV. 6) a)** • Puisque la fonction : $t \mapsto e^{-\lambda t}G(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, la fonction : $H : x \mapsto \int_0^x e^{-\lambda t} G(t)\,dt$ est de classe $C^1$, et sa dérivée est : $H'(x) = e^{-\lambda x}G(x)$, qui est positive, ce qui implique que la fonction $H$ est croissante.

• La fonction $G$ est une répartition, et vérifie donc : $G(x) \le 1$, ce qui implique, pour $x \ge 0$ :
$H(x) = \int_0^x e^{-\lambda t} G(t)\,dt \le \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt \le \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$, et la fonction $H$ est majorée.
Par ailleurs, cette fonction $H$ est positive sur $[0, +\infty[$, donc minorée.

• Par suite, d'après la question I. 3, on a : $xL(H)(x) = H(0) + L(H')(x) = L(H')(x) = ....$
$= \int_0^{+\infty} e^{-xt} H'(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-\lambda t} G(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} G(t)\,dt = L(G)(x+\lambda)$.

**IV. 6) b)** • La formule trouvée en IV. 5. b s'écrit : $e^{-\lambda x}F(x) = F(0) - \lambda H(x)$, ce qui implique, pour $x > 0$ :
$\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-\lambda t} F(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} F(0)\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \lambda H(t)\,dt$, soit : $L(F)(x+\lambda) = \frac{F(0)}{x} - \lambda L(H)(x)$,
et d'après IV. 6. a, on obtient enfin : $L(F)(x+\lambda) = \frac{F(0)}{x} - \lambda\frac{L(G)(x+\lambda)}{x}$.

Changeant $x$ en $x - \lambda$, cette égalité devient, pour $x > \lambda$ : $L(F)(x) = \frac{F(0)}{x-\lambda} - \lambda\frac{L(G)(x)}{x-\lambda}$.

**IV. 7)** • La formule donnée pour $G_n(x)$ à la question IV. 4, reliée à l'hypothèse de la question IV. 5, selon quoi les fonctions $F_n$ et $G_n$ sont indépendantes de $n$, conduit à : $G(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F(x-s)ds$. Le changement de variable : $t = x - s$ transforme cette égalité en : $G(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu(x-t)} F(t)dt = \mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu t} F(t)dt$.

• Cette fonction $G$ est croissante et bornée sur $[0, +\infty[$ car c'est une répartition. Notons que $G(0) = 0$, pour toutes sortes de raisons (formule ci-dessus, ou bien $G(0) = P(W_n \leq 0) = 0$).

• Puisque la fonction $F$ est continue sur $[0, +\infty[$, la fonction $G$ est de classe $C^1$, et sa dérivée est :

$G'(x) = \mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu t} F(t)dt = \mu.(-\mu)e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu t} F(t)dt + \mu e^{-\mu x} \mu e^{\mu x} F(x) = -\mu G(x) + \mu F(x)$.

• Il en résulte : $L(G') = -\mu L(G) + \mu L(F)$.

Par ailleurs, la formule trouvée à la question I. 3 donne : $L(G')(x) = -G(0) + xL(G)(x) = xL(G)(x)$.

Ces deux égalités conduisent à : $xL(G)(x) = -\mu L(G)(x) + \mu L(F)(x)$, soit finalement : $L(G)(x) = \dfrac{\mu}{x+\mu} L(F)(x)$.

**IV. 8) a)** • En reportant cette dernière formule dans celle de la question IV. 6. b, il vient :

$L(F)(x) = \dfrac{F(0)}{x-\lambda} - \dfrac{\lambda}{x-\lambda}\dfrac{\mu}{x+\mu} L(F)(x)$, d'où : $\dfrac{x^2 + \mu x - \lambda x}{x+\mu} L(F)(x) = F(0)$, et par suite :

$L(F)(x) = \dfrac{x+\mu}{x(x+\mu-\lambda)} F(0)$. On vérifie aisément que : $\dfrac{x+\mu}{x(x+\mu-\lambda)} = \dfrac{1}{\mu-\lambda}\left(\dfrac{\mu}{x} - \dfrac{\lambda}{x+\mu-\lambda}\right)$,

ce qui conduit à : $L(F)(x) = \dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\dfrac{\mu}{x} - \dfrac{\lambda}{x+\mu-\lambda}\right)$.

**IV. 8) b)** • On a vu à la question I. 2. c que si $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$, avec $\lambda \geq 0$, alors, pour tout réel $x > 0$, on a : $L(\varepsilon_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x+\lambda}$. L'égalité précédente s'interprète comme :

$L(F)(x) = \dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}(\mu L(\varepsilon_0)(x) - \lambda L(\varepsilon_{\mu-\lambda})(x)) = L\left(\dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}\mu\varepsilon_0 - \lambda\varepsilon_{\mu-\lambda}\right)(x)$, pour $x > \lambda$.

Comme les fonctions $F, \varepsilon_0, \varepsilon_{\mu-\lambda}$ sont continues et bornées sur $[0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'injectivité, dans sa version de la question III. 4. c, et en déduire : $F = \dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}(\mu\varepsilon_0 - \lambda\varepsilon_{\mu-\lambda})$, soit :

$$F(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}(\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}).$$

**IV. 8) c)** • La fonction $F$ admet la limite 1 en $+\infty$ parce que c'est une fonction de répartition. En faisant tendre $x$ vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, il vient : $1 = \dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}\mu$, d'où : $F(0) = \dfrac{\mu-\lambda}{\mu}$, et en remplaçant $F(0)$ par cette valeur, ladite formule devient : $F(x) = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu-\lambda)x}$.

**IV. 9) a)** • Le temps passé dans la poste par le $n$-ème client est $W_n$, et la fonction de répartition de cette variable aléatoire est $G$, et cette fonction $G$ est déterminée par la formule admise à la question IV. 4, eu égard au fait qu'elle ne dépend pas de $n$ : $G(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F(x-s)ds = \int_0^x \mu e^{-\mu s}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu-\lambda)(x-s)}\right)ds$

$$= \int_0^x (\mu e^{-\mu s} - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x} e^{-\lambda s})ds = \int_0^x \mu e^{-\mu s}ds - e^{-(\mu-\lambda)x}\int_0^x \lambda e^{-\lambda s}ds = 1 - e^{-(\mu-\lambda)x}.$$

• On reconnaît la répartition de la loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$, ce qui signifie que le temps passé dans la poste par un client suit cette loi.

**IV. 9) b)** • Si les arrivées sont deux fois plus fréquentes et le service deux fois plus rapide, les espérances de $\Delta_n$ et de $S_n$ sont divisées par 2, et il faut donc remplacer respectivement $\lambda$ et $\mu$ par $2\lambda$ et $2\mu$. Le paramètre de la loi exponentielle du temps passé dans la poste devient donc : $2(\mu - \lambda)$ et le temps moyen passé, qui est l'espérance de cette loi, est divisé par 2.

• La probabilité d'être servi tout de suite est : $F(0) = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$. Elle ne change pas si les paramètres $\lambda$ et $\mu$ sont tous deux multipliés par 2, soit si les arrivées sont deux fois plus fréquentes et le service deux fois plus rapide.

*R. C.*