Mathématiques
Voie économique

Probabilités et analyse en exercices

Jean Mallet
Agrégé de mathématiques, professeur en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Montaigne (Paris) et Prépasup (Paris).

Michel Miternique
Agrégé de mathématiques, professeur en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Jean-Baptiste Corot (Savigny sur Orge) et IPESUP (Paris).

Les exercices présentés ici sont extraits d'un ouvrage en six volumes, édité chez "Ellipses", destiné aux bacheliers désirant préparer une grande école de commerce ou un DEUG de Sciences Économiques et Sociales.

Cet ouvrage contient le cours de mathématiques conforme au programme des classes préparatoires économiques et commerciales (option économique, 1e et 2e années). Il comporte également de nombreux exercices corrigés, dont le but est de faire acquérir aux utilisateurs les automatismes nécessaires à la domination de l'essentiel du programme.

Les exercices sélectionnés pour *Référence* ont été choisis dans les ouvrages destinés aux "première année" en analyse et probabilités, sachant qu'ils peuvent leur être directement utiles dès le premier trimestre (bien évidemment, les autres peuvent en disposer à des fins de révisions).

Nous espérons que cet échantillon de l'ouvrage encourage les étudiants à poursuivre leurs efforts...

J. M. - M. M.

Des mêmes auteurs, chez Ellipses :

Déjà parus :

• Prépa HEC première année voie économique, première année de DEUG économique et commercial :

- Cours et exercices corrigés d'Algèbre
- Cours et exercices corrigés d'Analyse
- Cours et exercices corrigés de Probabilités

• Prépa HEC deuxième année voie économique, deuxième année de DEUG économique et commercial :

- Cours et exercices corrigés d'Algèbre

A paraître :

• Prépa HEC deuxième année voie économique, deuxième année de DEUG économique et commerciale

- Cours et exercices corrigés d'Analyse (fin 2000- début 2001)
- Cours et exercices corrigés de Probabilités (courant 2001)

Collection *E=MC2*, déjà parus : Analyse, Algèbre.

A paraître fin 2000 début 2001 : Probabilités discrètes, variables à densité.

Probabilités : énoncés

Exercice 1

A, B, C désignent 3 revues. Un sondage, effectué sur une population Ω, indique que 45% des personnes interrogées lisent A, 45% lisent B, 35% lisent C, 15% lisent A et B, 10% lisent B et C, 15% lisent C et A, 5% lisent les 3 revues.

On interroge une personne X au hasard. Quelle est la probabilité des événements suivants :

1) "X ne lit aucune des 3 revues".

2) "X lit exactement 2 revues".

3) "X lit A, mais pas C".

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable ($\mathcal{B}$ est l'ensemble des événements). $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont n probabilités sur $(\Omega, \mathcal{B})$. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n réels positifs tels que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. On pose $p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . p_i$. Montrer que p est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Exercice 3

A, B, C sont 3 événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, p)$.

1) Montrer que :

$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

2) Montrer que : $p(A \cap B \cap C) \geq 1 - p(\overline{A}) - p(\overline{B}) - p(\overline{C})$.

Exercice 4

On envisage une particule π pouvant occuper 2 positions A et B et se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

a) La position initiale (au temps 0) de la particule π est A. Au temps n, $n \in \mathbb{N}^*$, la particule π est soit en A, soit en B.

b) Entre 2 instants successifs, n et $n+1$, la particule π saute éventuellement d'une position à l'autre. Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut à l'instant n est, par ailleurs, indépendante de la position de la particule π à cet instant.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp B_n) l'événement "la particule π se trouve en A (resp en B) à l'instant n". On pose $\alpha_n = p(A_n)$ et $\beta_n = p(B_n)$. Nous pouvons donc exprimer **a)** et **b)** par

a') $\alpha_0 = 1$; $\alpha_n + \beta_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b') $\exists p \in]0,1[\ / \ \forall n \in \mathbb{N}$, on ait : $\begin{cases} p(A_n \cap A_{n+1}) = p\alpha_n \\ p(B_n \cap B_{n+1}) = p\beta_n \end{cases}$

1) Calculer $p(B_n \cap A_{n+1})$ en fonction de p et β_n.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_{n+1} = (2p-1)\alpha_n + 1 - p$.

3) En déduire α_n en fonction de n et de p. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$.

Exercice 1

1) L'univers est l'ensemble Ω. Désignons par A (resp. B, C) l'événement "X lit A (resp. B, C)". "X ne lit aucune des trois revues" est $\overline{A \cup B \cup C}$, événement contraire de $A \cup B \cup C$. La probabilité vaut $1 - P(A \cup B \cup C)$.
$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$. Mais $P((A \cup B) \cap C)$ vaut $P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

car $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$.

Ainsi, $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - \left(P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\right)$,
soit : $\underline{P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)}$.

On vient, en fait, de redémontrer la formule de Poincaré.

La valeur numérique de $P(A \cup B \cup C)$ est $\frac{1}{100}(45 + 45 + 35 - 15 - 10 - 15 + 5)$ soit $\frac{9}{10}$. Donc, $\boxed{P(\overline{A \cup B \cup C}) = 0,1}$

2) "X lit exactement deux revues" signifie :

"X lit A et B mais pas C"
ou "X lit B et C mais pas A"
ou "X lit C et A mais pas B". Cet événement est donc l'union : $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \cup (C \cap A \cap \overline{B})$. Les trois événements qui composent cette union sont incompatibles deux à deux. La probabilité cherchée vaut donc :

$P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(B \cap C \cap \overline{A}) + P(C \cap A \cap \overline{B})$.

Remarquons que : $\begin{cases} (A \cap B \cap \overline{C}) \cap (A \cap B \cap C) = \emptyset \\ (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B. \end{cases}$

donc, $P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)$,
alors, $\underline{P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)}$.

De même, $P(B \cap C \cap \overline{A}) = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$,
et $P(C \cap A \cap \overline{B}) = P(C \cap A) - P(A \cap B \cap C)$.

Ainsi, la probabilité cherchée vaut :
$\underline{P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - 3P(A \cap B \cap C)}$, numériquement, on obtient : $\frac{1}{100}(15 + 10 + 15 - 3 \times 5) = \frac{25}{100} = \boxed{0,25.}$

3) On cherche $P(A \cap \overline{C})$. $\begin{cases} (A \cap C) \cap (A \cap \overline{C}) = \emptyset \\ (A \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) = A, \end{cases}$

donc $P(A\cap C)+P(A\cap \bar{C}) = P(A)$; $\underline{P(A\cap\bar{C}) = P(A)-P(A\cap C)}$,

numériquement, $P(A\cap\bar{C}) = \frac{1}{100}(45-15) = \boxed{0,30}$

Exercice 2

$\underline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . P_i(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1}$, car $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P_i(\Omega)=1$.

Pour tout $A\in\mathcal{B}$, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $0 \leq P_i(A) \leq 1$, donc, $0\leq \lambda_i . P_i(A) \leq \lambda_i$ puisque $\lambda_i \geq 0$.

Par suite, $\underline{0 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . P_i(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1}$.

Quels que soient les événements A et B de $\mathcal{B}$ tels que $A\cap B=\emptyset$, quel que soit i de $[\![1,n]\!]$, $P_i(A\cup B) = P_i(A)+P_i(B)$.

Donc $\underline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . P_i(A\cup B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . P_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . P_i(B)}$.

D'après les résultats soulignés,

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . P_i \text{ est une probabilité sur } (\Omega,\mathcal{B}).}$

Exercice 3

1) Regardons A, B, C, comme des sous-ensembles de Ω. Pour établir l'égalité : $\overline{A\cup B\cup C} = \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$, il suffit de montrer que les sous-ensembles $\overline{A\cup B\cup C}$ et $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ ont les mêmes éléments.

Soit x un élément de Ω. x est élément de $\overline{A\cup B\cup C}$ si et seulement si x n'est pas élément de $A\cup B\cup C$; autrement dit, si x n'est élément ni de A, ni de B, ni de C ; ce qui signifie que x est élément de $\bar{A}$ et de $\bar{B}$ et de $\bar{C}$, c'est-à-dire de $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. On a bien : $\boxed{\overline{A\cup B\cup C} = \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}.}$ (1)

L'égalité est vraie quels que soient les sous-ensembles A, B, C de Ω. On peut donc écrire (1) en remplaçant A, B, C par leurs complémentaires $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. On obtient alors :

$$\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}} = A\cap B\cap C. \quad (2)$$

Prenons le complémentaire des deux membres de (2), on obtient l'égalité suivante, qui est l'égalité cherchée :

$$\boxed{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C} = \overline{A\cap B\cap C}.}$$

2) $P(A\cap B\cap C) = 1 - P(\overline{A\cap B\cap C})$;

$\underline{P(A\cap B\cap C) = 1 - P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})}$ d'après (2)

$P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}) = P((\bar{A}\cup\bar{B})\cup\bar{C}) = P(\bar{A}\cup\bar{B}) + P(\bar{C}) - P((\bar{A}\cup\bar{B})\cap\bar{C})$.

Les probabilités étant positives, $P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}) \leq P(\bar{A}\cup\bar{B}) + P(\bar{C})$.

De plus, $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\cap\bar{B})$ implique l'inégalité : $P(\bar{A}\cup\bar{B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ qui permet de déduire :

$$P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B}) + P(\bar{C}).$$

Utilisant cette dernière inégalité, et l'égalité soulignée plus haut on obtient :

$$\boxed{P(A\cap B\cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}).}$$

Exercice 4

1) A_{n+1} et B_{n+1} constituent un système complet d'événements (c'est-à-dire forment une partition de l'univers), alors,

$B_n = (B_n\cap A_{n+1})\cup(B_n\cap B_{n+1})$ et $(B_n\cap A_{n+1})\cap(B_n\cap B_{n+1}) = \emptyset$;

donc $P(B_n) = P(B_n\cap A_{n+1}) + P(B_n\cap B_{n+1})$, autrement dit,

$\beta_n = P(B_n\cap A_{n+1}) + p\beta_n$. D'où,

$$\boxed{P(B_n\cap A_{n+1}) = \beta_n(1-p).}$$

2) A_n et B_n constituent un système complet d'événements, donc, comme à la première question, on établit que :

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}\cap A_n) + P(A_{n+1}\cap B_n)$, c'est-à-dire :

$$\alpha_{n+1} = p\alpha_n + (1-p)\beta_n = p\alpha_n + (1-p)(1-\alpha_n).$$

On trouve $\boxed{\alpha_{n+1} = (2p-1)\alpha_n + (1-p)}$

3) $\underline{\text{Si}}$ $\underline{p = \frac{1}{2}}$,

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 1-p = \frac{1}{2}$.

$\underline{\text{Si}}$ $\underline{p \neq \frac{1}{2}}$,

$\underline{\text{La suite}}$ (α_n) est arithmético-géométrique ($2p-1 \neq 1$ car $p\neq 1$).

Calculons le point fixe x :

$x = (2p-1)x + (1-p)$ équivaut à $x(1-(2p-1)) = 1-p$, puis, $x = \frac{1}{2}$

On sait que la suite de terme général $q_n = \alpha_n - \frac{1}{2}$ est géométrique de raison $2p-1$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = (2p-1)^n q_0$ et $q_0 = \alpha_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Par suite,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{(2p-1)^n}{2} + \frac{1}{2}}$$

Cette formule est valable pour $p = \frac{1}{2}$.

$0 < p < 1$, donc $-1 < 2p-1 < 1$, par suite :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}}$$

Analyse : énoncés

Pour les trois premiers exercices suivant, étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, prolongement par continuité, dérivée, limites aux bornes, étude des branches infinies) et tracer leur représentation graphique C_f

Exercice 1

$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$

Exercice 2

$f(x) = exp(\frac{\ln|x|}{\ln|x| - 1})$

Exercice 3

$f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4

$n \in \mathbb{N}$; on pose $I_n = \int_0^1 (x^2-1)^n dx$.

En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. et calculer alors I_n en fonction de n.

Exercice 5

$n \in \mathbb{N}$; on pose $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que $I_n = \frac{e^2 - nI_{n-1}}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Étudier les variations de la suite (I_n). Conclusion ?

4) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$: $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$. (On utilisera la variation de (I_n)).

5) En déduire un équivalent de I_n et la nature de la série de terme général I_n.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} dx$.

1) Calculer I_n.

2) Calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 1

Posons $u(x) = x^3 - 6x^2$ et $v(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et s'annule en 0 et en 6 (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x)$ vaut $x^2(x-6)$), v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc $f = v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0, 6\}$ avec $\boxed{f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 12x) = \frac{x(x-4)}{\sqrt[3]{(x^3-6x^2)^2}}}$

En 0 : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 6x^2}{x^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}}$ a pour limite $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en 0^-.

$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$; $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées $(0 ; 0)$ deux demi-tangentes parallèles à $(y'y)$.

En 6 : $\frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x - 6} = \sqrt[3]{\frac{x^2(x-6)}{(x-6)^3}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-6)^2}}$ a pour limite $+\infty$ en 6.

$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 6}$; $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées $(6 ; 0)$ une tangente parallèle à $(y'y)$.

Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		4		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\sqrt[3]{32}$	↗	0	↗	$+\infty$

$-\sqrt[3]{32} = -2\sqrt[3]{2}$

$\simeq -3{,}17$

$f(x) \underset{\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^3}$; $f(x) \underset{\infty}{\sim} x$. Au voisinage de ∞,

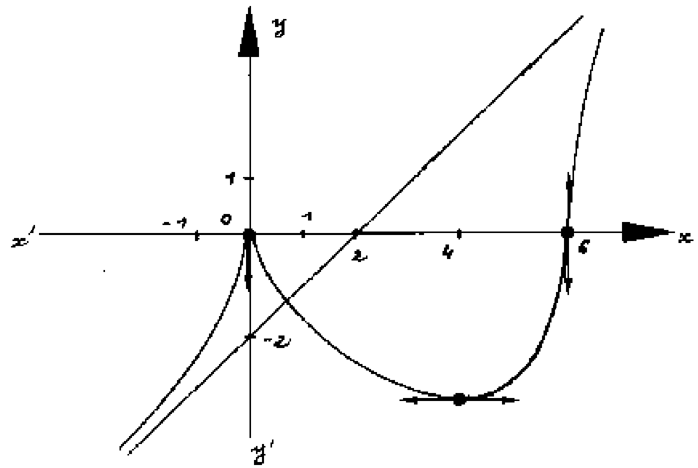
$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x$. Utilisons l'identité remarquable :

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ avec $a = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ et $b = x$.

$$f(x) - x = \frac{x^3 - 6x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2} = \frac{-6x^2}{\sqrt[3]{x^6(1 - \frac{6}{x})^2} + x\sqrt[3]{x^3(1 - \frac{6}{x})} + x^2}$$

$$f(x) - x = \frac{-6x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(1 - \frac{6}{x})^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} + 1\right)}$$

On simplifie par x^2 et on trouve : $\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \frac{-6}{3} = -2$. La droite d'équation $\boxed{y = x - 2}$ est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ à $\mathcal{C}_f$. D'autre part, $f(x) \geq x - 2$ équivaut successivement à $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} \geq x - 2$; $x^3 - 6x^2 \geq (x-2)^3$; $x^3 - 6x^2 \geq x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; $x \leq \frac{2}{3}$. Ceci prouve que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote si et seulement si $x \leq \frac{2}{3}$, et que $\mathcal{C}_f$ coupe l'asymptote au point de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; -\frac{4}{3}\right)$.



Exercice 2

Posons $u(x) = \ln|x|$. $f(x)$ existe si et seulement si $u(x) \neq 1$, c'est-à-dire $\begin{cases} |x| \neq e \\ x \neq 0 \end{cases}$. f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* - \{-e ; e\}$.

u est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, $\frac{u}{u-1}$ est un rapport de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$, dont le dénominateur ne s'annule pas, $\frac{u}{u-1}$

est donc dérivable sur D_f, par suite, $\exp \circ \frac{u}{u-1}$ est dérivable sur D_f puisque exp l'est sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in D_f,\ f'(x) = \left(\exp \circ \frac{u}{u-1}\right)'(x) = \exp\left(\frac{\ln|x|}{\ln|x|-1}\right) \times \left(-\frac{1}{x(\ln|x|-1)^2}\right)}$$

Remarquons que f est paire, étudions-la sur $D_f \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^* - \{e\}$.

Sur cet ensemble, $f'(x) < 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln|x|}{\ln|x|-1} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln x}} = 1$, donc, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e$ (par continuité de exp en 1), la limite est la même en 0^-. $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$

$\lim\limits_{x \to e^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = +\infty$; par parité, $\lim\limits_{x \to -e^-} f(x) = +\infty$, en effet, si $x < -e$, $-x > +e$ et $f(x) = f(-x)$.

$\lim\limits_{x \to e^-} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = 0$; par parité, $\lim\limits_{x \to -e^+} f(x) = 0$. $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité à gauche en } e, \text{ à droite en } -e.}$

Soit g la fonction définie par : $g(x) = f(x)$ si $x \in D_f$, $g(0) = e$, $g(e) = g(-e) = 0$. g est continue sur $\mathbb{R} - \{-e; e\}$, continue à droite en $-e$, à gauche en e. g est paire.

Etudions la dérivabilité de g en 0, à gauche en e, à droite en $-e$.

Sur D_f, $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{e^{\frac{\ln|x|}{\ln|x|-1}} - e}{x} = \frac{e \cdot e^{\frac{1}{\ln|x|-1}} - e}{x} = \frac{e\left(e^{\frac{1}{\ln|x|-1}} - 1\right)}{x}$ car $\frac{\ln|x|}{\ln|x|-1} = \frac{\ln|x| - 1 + 1}{\ln|x|-1} = 1 + \frac{1}{\ln|x|-1}$ si $x \in D_f$.

Pour $x \in D_f$, $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{e\left(e^{\frac{1}{\ln|x|-1}} - 1\right)}{x}$. Étudions sa limite en 0.

$\frac{1}{\ln|x|-1}$ a pour limite 0 en 0 donc $e^{\frac{1}{\ln|x|-1}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{\ln|x|-1}$ et, $\frac{g(x)-g(0)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{e}{x(\ln|x|-1)}$; $x(\ln|x|-1) = x.\ln|x| - x$ a pour limite 0 en 0, est < 0 si $x \in]0; e[$, est > 0 si $x \in]-e; 0[$,

donc $\frac{g(x)-g(0)}{x}$ a pour limite $-\infty$ en 0^+, $+\infty$ en 0^-. $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

Sur $]0; e[$, $g'(x) = f'(x) = e^{\frac{\ln x}{\ln x - 1}} \times \frac{-1}{x(\ln x - 1)^2}$ car $x = |x|$.

$$g'(x) = e \cdot e^{\frac{1}{\ln x - 1}} \times \frac{-1}{x(\ln x - 1)^2} \quad \text{en écrivant } \frac{\ln x}{\ln x - 1} = 1 + \frac{1}{\ln x - 1}$$

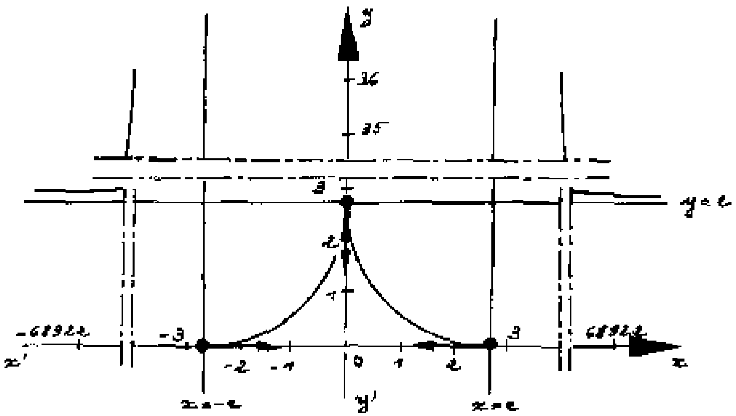
$$g'(x) = -\frac{e}{x} \times \frac{1}{(\ln x - 1)^2} \times e^{\frac{1}{\ln x - 1}}.$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to e^-} \frac{1}{\ln x - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 . e^X = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to e^-} g'(x) = 0$. $\boxed{g \text{ est dérivable à gauche en } e}$ avec $g'_g(e) = 0$. Par parité, $\boxed{g \text{ est dérivable à droite en } -e}$ avec $g'_d(-e) = 0$.

Dressons le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	
g	e	↘	0 | $+\infty$	↘	e

Pour $x > e$, $g(x) = f(x) = e^{\frac{1}{1 - \frac{1}{\ln x}}}$, on utilise la même écriture que dans l'étude de la limite en 0. On trouve que g a pour limite e en $+\infty$, et en $-\infty$ par parité. La droite d'équation $\boxed{y = e}$ est asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$ et en $-\infty$.



Exercice 3

Posons $u(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $v(x) = \frac{1}{x}$. $f = u \times \exp_o v$.

u est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (et définie sur $\mathbb{R}^*$), exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\exp_o v$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{1\},\ f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(x-1)} \cdot e^{\frac{1}{x}},$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}},$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}$$

$f'(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - 3x + 1$ qui a pour racines : $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ce trinôme est > 0 si et seulement si $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$. $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc,

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ (il suffit de poser $\frac{1}{x} = X$). Par suite,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité à gauche en } 0.}$

Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in D_f = \mathbb{R}^* - \{1\}$, $g(0) = 0$. g est continue et dérivable sur D_f, continue à gauche en 0, regardons si g est dérivable en 0 à gauche :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2 - 1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$. $\boxed{g \text{ est dérivable à gauche en } 0}$ avec $g'_g(0) = 0$.

Dressons le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	0 ‖ $-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

$g(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{x^2}{x-1} \underset{\infty}{\sim} x$; $g(x) - x = \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{\frac{1}{x}} - x = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 + x}{x-1}$,

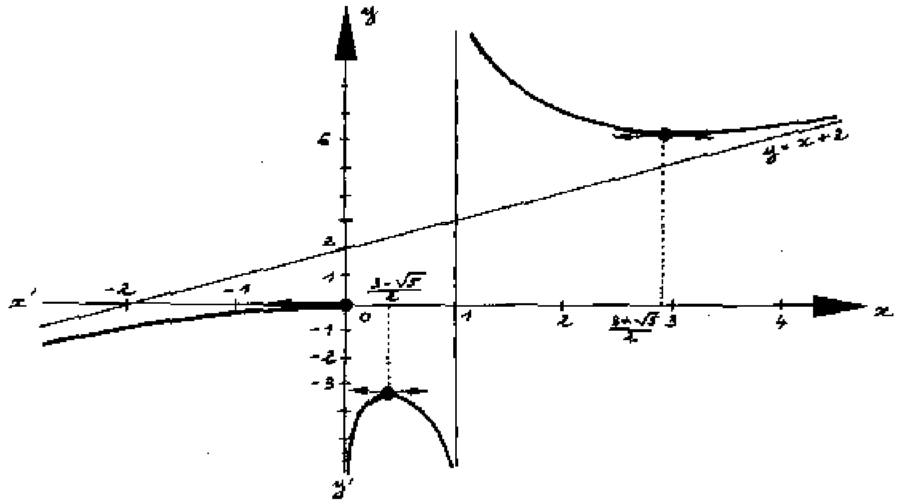
$g(x) - x = \frac{x^2}{x-1} \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) + \frac{x}{x-1}$. $\frac{x^2}{x-1} \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) \underset{\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ et $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, donc $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$. De plus, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1$. Alors, $\lim\limits_{x \to \infty} (g(x) - x) = 1 + 1 = 2$.

La droite d'équation $\boxed{y = x + 2}$ est asymptote à la courbe représentative de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$M = \frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1} \times e^{\frac{2}{3-\sqrt{5}}} = \frac{\frac{14-6\sqrt{5}}{4}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \times e^{\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \times e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$M = \frac{(7-3\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} \times e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = (2-\sqrt{5}) \times e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \simeq -3{,}23.$$

Pour calculer m, il suffit de remplacer $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans l'expression de M. On trouve $m = (2+\sqrt{5}) \cdot e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \simeq 6{,}19$.



Exercice 4

On vérifie que toutes les intégrales existent.

Posons $u(x) = (x^2-1)^{n+1}$; $u'(x) = 2(n+1)x.(x^2-1)^n$

$v'(x) = 1$; $v(x) = x$,

$$I_{n+1} = \left[x.(x^2-1)^{n+1} \right]_0^1 - 2(n+1)\int_0^1 x^2.(x^2-1)^n dx.$$

Le crochet est nul et $\int_0^1 x^2.(x^2-1)^n dx = \int_0^1 ((x^2-1)+1).(x^2-1)^n dx$,

alors $I_{n+1} = -2(n+1).\left(\int_0^1 \left((x^2-1)^{n+1} + (x^2-1)^n\right) dx \right)$,

$$I_{n+1} = -2(n+1).(I_{n+1} + I_n).$$

D'où, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{-2(n+1)}{2n+3} I_n.}$

Calcul de I_n.

Remarquons que $I_0 = 1$. Écrivons l'égalité précédente en remplaçant n par k et en faisant varier k de 0 à $n-1$; n étant supposé $\geqslant 1$. On obtient la suite d'égalités :

$$I_0 = 1$$
$$I_1 = \frac{-2}{3} I_0$$
$$I_{k+1} = \frac{-2(k+1)}{2k+3}.I_k$$
$$I_n = \frac{-2n}{2n+1}.I_{n-1}$$

$\forall k \in [0; n-1]$, $(x^2-1)^k$ est

$\geqslant 0$ si k est pair,

$\leqslant 0$ si k est impair sur $[0;1]$.

Mais $(x^2-1)^k$ n'est jamais la fonction nulle sur $[0;1]$; alors,

$\forall k \in [0; n-1]$, $I_k \neq 0$.

On peut multiplier membre à membre les égalités précédentes, on obtient, après simplification :

$I_n = \frac{(-2n)\dots(-2(k+1))\dots(-2)}{(2n+1)\dots(2k+3)\dots\dots 3} \times 1$, il y a n termes au numérateur, de -2×1 à $-2\times n$; donc,

$$I_n = \frac{(-1)^n . 2^n . (1\times 2\times \dots \times n)}{3\times \dots \times (2k+3)\times \dots \times (2n+1)}$$

Multiplions les deux termes de la fraction par $2\times 4\times 6\times \dots \times (2n)$ c'est-à-dire par $(2\times 1)\times(2\times 2)\times\dots\times(2\times n) = 2^n.(n!)$. Alors,

$$I_n = \frac{[(-1)^n . 2^n . (n!)] \times [2^n . (n!)]}{2\times 3\times 4\times \dots \times (2n)\times(2n+1)} = \frac{(-1)^n \times 4^n \times (n!) \times (n!)}{(2n+1)\times (2n)!}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(-4)^n}{2n+1} \times \frac{1}{C_{2n}^n}}$$

Exercice 5

On vérifie que toutes les intégrales existent.

1) $I_0 = \int_1^e t.dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^e$. $\boxed{I_0 = \frac{e^2-1}{2}}$

Pour I_1, posons $u_1(t) = \ln t$; $u_1'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t$; $v(t) = \frac{1}{2}t^2$.

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e t.dt = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e,$$

$$\boxed{I_1 = \frac{e^2+1}{4}}$$

2) Posons $u_n(t) = (\ln t)^n$; $u_n'(t) = n\frac{(\ln t)^{n-1}}{t}$,
$v'(t) = t$; $v(t) = \frac{1}{2}t^2$,

$$I_n = \left[\frac{1}{2}t^2(\ln t)^n\right]_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e t(\ln t)^{n-1}\,dt,$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{e^2 - n\,I_{n-1}}{2}}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_1^e t(\ln t)^n(\ln t - 1)\,dt$.

$\forall t \in [1;e]$, $t(\ln t)^n \geq 0$ et $(\ln t - 1) \leq 0$. Les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant, $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

$$\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [1;e]$, $t(\ln t)^n \geq 0$ et $1 < e$, donc $I_n \geq 0$.

(I_n) est décroissante minorée, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Divisons la relation obtenue au 2) par n : $\frac{I_n}{n} = \frac{e^2}{2n} - \frac{I_{n-1}}{2}$.

$\frac{I_n}{n}$, $\frac{e^2}{2n}$ ont pour limite 0 en $+\infty$, I_{n-1} a pour limite ℓ, donc $\ell = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

4) Pour $n \geq 1$, $I_n = \frac{e^2 - n\,I_{n-1}}{2}$ d'après 2) ; on a vu que $I_n \leq I_{n-1}$ donc $-\frac{n}{2}I_{n-1} \leq -\frac{n}{2}I_n$ et, $\frac{e^2 - nI_{n-1}}{2} \leq \frac{e^2 - nI_n}{2}$, c'est-à-dire $I_n \leq \frac{e^2 - nI_n}{2}$, ce qui donne successivement : $2I_n \leq e^2 - n\,I_n$, $(2+n)\,I_n \leq e^2$, $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$. Remarquons que cette inégalité est vraie pour $n = 0$.

D'autre part, en écrivant l'égalité du 2) à l'ordre $n+1$, on obtient : $I_{n+1} = \frac{e^2 - (n+1)\,I_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, $I_{n+1} \leq I_n$ implique successivement : $\frac{e^2 - (n+1)\,I_n}{2} \leq I_n$, $e^2 - (n+1)I_n \leq 2I_n$
$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n$.

Concluons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}}$$

5) D'après 4), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+3} \leq \frac{n\,I_n}{e^2} \leq \frac{n}{n+2}$. $\frac{n}{n+3}$ et $\frac{n}{n+2}$ ont pour limite 1 en $+\infty$, donc $\frac{n\,I_n}{e^2}$ aussi. Donc,

$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^2}{n}}$ Les séries à termes positifs $(\sum I_n)$ et $(\sum \frac{e^2}{n})$ ont leurs termes généraux équivalents en $+\infty$, $(\sum \frac{e^2}{n})$ diverge (série harmonique multipliée par e^2), donc,

$$\boxed{\text{la série de terme général } I_n \text{ diverge.}}$$

Exercice 6

On vérifie que la fonction à intégrer est continue sur $[0;1]$.

1) Posons $u = \sqrt[n]{1+x^n}$ (on vérifie que u est de classe C^1),

$du = \frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} \times n x^{n-1}\,dx = \left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)^{1-n} \times x^{n-1}\,dx = \frac{x^{n-1}}{u^{n-1}}\,dx$,

donc $x^{n-1}\,dx = u^{n-1}\,du$.

x	u
0	1
1	$\sqrt[n]{2}$

$$I_n = \int_1^{\sqrt[n]{2}} \frac{u^{n-1}}{u^{n+1}}\,du = \int_1^{\sqrt[n]{2}} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{\sqrt[n]{2}} ;$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}}$$

2) Écrivons $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = e^{-\frac{1}{n}\ln 2}$, on constate ainsi que $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ a pour limite $e^0 = 1$ en $+\infty$, donc : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$