Ne copiez pas sur votre voisin...

Hélène Lapeyre, Jean-Pierre Siau
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Jacques Amyot (Melun).

“Dieu a créé l’élève de prépa économique et commerciale, le diable a créé son voisin”. Que vous soyez préparationnaire en voie scientifique, économique ou technologique, de première ou deuxième année, vous avez certainement vécu l’expérience suivante. Devant le “méfait” mathématique perpétré par votre voisin, votre professeur de mathématiques s’est écrié : *“Votre raisonnement n’est pas rigoureux !”*

Le but d’une telle remarque n’est surtout pas de briser l’esprit d’initiative de votre voisin ; l’intuition, la capacité de se poser des questions judicieuses et originales, ont été au cours des siècles les facteurs de la création mathématique. Cependant, une proposition mathématique une fois énoncée, votre voisin doit en fournir une preuve par une suite rigoureuse de déductions logiques. C’est là, devant une démonstration qui résiste, que votre voisin a pu céder à la tentation et, sans le vouloir, “démontrer” une proposition équivalente à 0 = 1.

Nous sommes bien certains que vous, ami lecteur, n’avait jamais succombé. Nous vous proposons cependant un petit jeu, auquel nous avons donné le nom de *“Ne copiez pas sur votre voisin...”*, et dont voici la règle. Nous énoncerons une démonstration, évidemment erronée, d’une égalité équivalente à O = 1 ou une proposition mathématique fausse, accompagnée du symbole “erreur” :

💣

Vous allez ensuite rencontrer le symbole

A vous de jouer !!!

Votre mission, si vous l’acceptez, sera alors de chercher l’erreur, ou de construire un contre-exemple, **avant** de consulter la solution que nous vous proposons (et que nous espérons bonne ?!?!), accompagnée du symbole

☺

Une variante du jeu est la suivante. Nous énoncerons une proposition et la ferons suivre de la démonstration de votre voisin, accompagnée du symbole :

?!☹!?

Vous allez ensuite rencontrer le symbole

A vous de jouer !!!

Votre mission sera de chercher et corriger la ou les erreurs, **avant** de consulter une solution, accompagnée du symbole :

☺

Prêt pour ce défi? Alors, à vous de jouer !

Une dernière remarque, avant de commencer : n’oubliez pas de rassurer votre voisin, en lui racontant l’histoire qui suit ; elle montre que le chemin qui mène à une démonstration peut être bien sinueux et que, sur ce chemin, même les mathématiciens les plus prestigieux font des erreurs.

Un peu d'histoire

Il était une fois, il y a de cela presque quatre siècles, dans la ville de Toulouse, un magistrat nommé Pierre de Fermat. De sa naissance en 1602 à son décès en 1665, il ne quitta jamais sa province du sud. II ne fut jamais un mathématicien professionnel et pourtant, il énonça une proposition qui dut attendre plus de 300 ans avant d'être démontrée, après avoir été objet de recherche pour les plus grands mathématiciens des siècles suivants.

Comme de nombreux savants du XVII^e^ siècle, Pierre de Fermat étudia à partir des textes classiques de 1'Antiquité ; en particulier, il se passionna pour 1'*Arithmetica* du mathématicien grec Diophante, qu'il annota souvent. Dans une marge, il écrit : *"Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux autres puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à deux n'est la somme de deux puissances analogues. J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais je ne peux l'écrire dans cette marge car elle est trop longue"*. La conjecture énoncée dans cette note (pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels x, *y*, z tels que $x^n + y^n = z^n$) va être baptisée "le grand théorème de Fermat" et va hanter les nuits des mathématiciens pendant 350 ans, avant d'être prouvée et de pouvoir légitimement être appelée théorème.

Nous ne pouvons donner ici que quelques étapes de cette longue histoire. Les travaux de *Fermat* lui-même prouvent le cas n=4. C'est seulement 100 ans plus tard que Leonhard Euler, un des mathématiciens les plus éminents du XVIII^e^ siècle, prouva le cas n=3. Sa démonstration comportait cependant une grave erreur, qui fut corrigée ultérieurement. Les siècles suivants virent apparaître de nombreuses "démonstrations" du théorème, adressées à l'Académie des Sciences de Paris par des mathématiciens amateurs ou professionnels, mais toutes erronées. C'est seulement vers 1850 que l'arithméticien allemand Ernst Kummer apporta une contribution très importante, en démontrant le théorème pour presque tous les entiers premiers inférieurs à 100 ; ses travaux lui valurent la médaille d'or de l'Académie des Sciences. Au XX^e^ siècle, l'utilisation d'ordinateurs de plus en plus puissants fournit des preuves pour des entiers *n* de plus en plus grands, mais non la preuve du théorème. C'est enfin en 1993, que le mathématicien de l'Institut Isaac Newton de Cambridge, Andrew Wiles, proposa une démonstration du théorème ; il y trouva lui-même une faille qu'il corrigea ensuite. Cette démonstration est si complexe que les plus grands mathématiciens actuels ont dû travailler longuement pour la valider !! Sans doute pourront enfin être délivrés les 300 000 francs-or que l'Académie des Sciences promit en 1854 à qui démontrerait le grand théorème de Fermat, et qui lui valut pendant plus d'un siècle un flot de fausses démonstrations...

H. L. - J.-P. S.

Référence

1. Qui trouvera l'erreur ou un contre-exemple ?

Première partie

Soient deux entiers naturels a et b tels que $a = b$.

$$\begin{array}{lrcl} & ab & = & a^2 \\ \text{donc,} & ab - b^2 & = & a^2 - b^2 \\ \text{donc,} & b(a-b) & = & (a-b)(a-b) \\ \text{donc,} & b & = & a + b \\ \text{donc,} & b & = & 2b \\ \text{donc,} & 1 & = & 2. \end{array}$$

****

A vous de jouer !!!

****

Gagné!!
$a - b = 0$! Il n'y a donc pas équivalence des propositions $b(a-b) = (a+b)(a-b)$ et $b = a + b$.
Moralité:

On ne peut pas écrire: si $ab = cb$, alors $a = c$.

On peut écrire: si $ab = cb$ et $b \neq 0$, alors $a = c$.

On peut écrire: si $ab = cb$, alors $b = 0$ ou $a = c$.

Deuxième partie

Soit un nombre réel x tel que $x^2 = 1$. Comme ces quantités sont strictement positives, considérons leur logarithme.

$$\begin{array}{lrcl} & ln(x^2) & = & ln 1 \\ \text{donc,} & 2ln x & = & 0 \\ \text{donc,} & ln x & = & 0 \\ \text{donc,} & x & = & e^0 \\ \text{donc,} & x & = & 1 \end{array}$$

Or, si $x = -1$, alors $x^2 = 1$. Donc, nous venons de démontrer:

$$1 = -1.$$

****

A vous de jouer !!!

****

Gagné!!
$ln(x^2) = 2ln(|x|)$! On obtient donc $|x| = 1$. Pour $x = -1$, on aboutit à la conclusion $|-1| = 1$, qui est bien vraie!
Moralité:

Avant de considérer $ln(x)$, vérifiez toujours que $x > 0$.

Troisième partie

Soient quatre entiers relatifs tous non nuls, a, b, c, d, tels que $ad = bc$ et $a > b$.
Si $ad = bc$ et si $bd \neq 0$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Si $a > b$, alors $\frac{a}{b} > 1$.
Donc, $\frac{c}{d} > 1$ et $c > d$.
Choisissons $a = d = 1$ et $b = c = -1$. On a bien $ad = bc$ et $a > b$.
Alors, $c > d$ et donc:

$$-1 > 1.$$

A vous de jouer !!!

Gagné!!

$a > b$, n'implique $\frac{a}{b} > 1$ que sous l'hypothèse $b > 0$, qui n'est pas vérifiée dans l'exemple choisi.

Moralité:

Avant d'affirmer: si $a < c$ alors $ab < cb$, vérifiez que $b > 0$

Quatrième partie

Calculons de deux façons $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

- $\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n} = 0$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$. On en déduit:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

- $1+\frac{1}{n} > 0$ et $ln[(1+\frac{1}{n})^n] = nln(1-\frac{1}{n})$. Or,

$$ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\ (n\to-\infty)$$

$$nln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1\ (n\to+\infty)$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} nln(1+\frac{1}{n}) = 1$, et par continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$$

Conclusion: d'après l'unicité de la limite,

$$e = 1$$

A vous de jouer !!!

Gagné!!

Le premier calcul de limite est faux. Il s'agit d'une forme indéterminée, car $(1+\frac{1}{n})^n = exp(nln(1+\frac{1}{n}))$. Le deuxième calcul est le bon.

Moralité:

N'oubliez pas que, pour $a > 0$, $a^b = e^{blna}$.

Souvenez vous de cette limite: $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Ne confondez pas $(a(n))^b$ avec b fixé et $(a(n))^{b(n)}$ (y compris lors de l'utilisation de développements limités)

Cinquième partie

Un résultat classique d'analyse montre:

$$ln2 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$ln2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\dots$$

En séparant les termes de dénominateurs pairs et impairs, on obtient:

$$ln2 = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\dots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots\right)$$

En ajoutant et retranchant les termes de dénominateurs pairs, on obtient:

$$ln2 = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\dots\right)$$

puis,

$$ln2 = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\dots\right)$$

Conclusion:

$$ln2 = 0.$$

A vous de jouer !!!

Gagné!!

L'usage des points de suspension, pour parler de la série de Riemann de paramètre 1 divergente, est ici générateur d'erreur. Notons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

et écrivons le résultat correct,

$$ln2 = \lim_{p \to +\infty} S_{2p}.$$

Reprenons les transformations proposées sur S_{2p}.

$$S_{2p} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2p-1}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2p})$$

$$S_{2p} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2p}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2p})$$

$$S_{2p} = (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2p}) \quad (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots - \frac{1}{p})$$

. Finalement,

$$S_{2p} = \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k}$$

et on a, en fait, démontré que:

$$ln2 = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k}.$$

On peut retrouver ce résultat, très simplement, par la méthode des rectangles. Par décroissance de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$, par $f(t) = \frac{1}{t}$, on montre pour tout entier $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$$

Par sommation pour k variant de $p+1$ à $2p$, et par la relation de Chasles, on obtient:

$$\int_{p+1}^{2p+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} \leq \int_p^{2p} \frac{1}{t} dt$$

Par calcul de ces intégrales,

$$ln(\frac{2p+1}{p+1}) \leq \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} \leq ln2$$

Par théorème d'encadrement,

$$ln2 = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k}.$$

Moralité:

Travaillez sur la série et non sur sa somme.

Sixième partie

Voici un théorème de votre voisin:"Toute suite décroissante minorée par 0, converge vers 0."

****

A vous de jouer !!! (trouvez un contre exemple et proposez un énoncé correct)

****

Gagné!!

Un contre exemple: $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

L'énoncé correct est :"Toute suite décroissante minorée par 0, converge vers une limite $l \geq 0$."

Septième partie

Voici un autre théorème de votre voisin:"Soit une suite de fonctions (f_n) définies et continues sur $[a,b]$. Si il existe une fonction f continue sur $[a,b]$ telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx."$$

****

A vous de jouer !!! (trouvez un contre exemple)

****

Considérons la suite de fonctions (f_n), définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = (n+1)\sin^n x \cos x$. Alors:

- Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $0 \leq \sin x < 1$. Par théorème de croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

- Pour tout entier n, $f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Donc, Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La fonction f est la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$.

Mais, calculons pour tout entier n, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$. Rappelons qu'une primitive de $(n+1)u^n u'$ est u^{n+1}. On obtient:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = [\sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Sur cet exemple,

$$lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

Cependant, le résultat énoncé est vrai pour de nombreuses suites de fonctions (f_n) et on vous demandera souvent de **démontrer** une proposition telle que

$$lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^{-x}dx = 0.$$

Votre voisin ne dira plus, désormais, que cette proposition est vraie, car $\lim_{n\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$. Il dira:

Pour tout entier n et tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

Par positivité de l'intégrale,

$$0 < \int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^{-x}dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx$$

soit

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^{-x}dx \leq \frac{1}{n+1}(\frac{1}{2})^{n+1}$$

Il conclura, par le théorème d'encadrement, que $lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^{-x}dx$ existe et

$$lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^{-x}dx = 0.$$

2. Une variante du jeu : qui trouvera l'erreur de démonstration de son voisin ?

Première partie

Enoncé: On considère une suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{2u_n+5}$.

Nous supposons qu'il a été démontré au préalable que cette suite est bien définie.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq -1$.
2. Soit (v_n) la suite définie par: pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{2v_n-1}{u_n+2}$.

   2-a. Montrer que (v_n) est géométrique

   2-b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $lim_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration de mon voisin pour la première question:

?!☹!?

$u_0 \neq -1$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons $u_n \neq -1$ et démontrons $u_{n+1} \neq -1$.
$u_n \neq -1$ entraîne $2u_n - 1 \neq -3$ et $2u_n - 5 \neq 3$.
Donc $(\frac{2u_n-1}{2u_n-5} \neq \frac{-3}{3})$, soit $u_{n+1} \neq -1$.
On a bien démontré par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \neq -1$.

****

A vous de jouer !!!

****

☺

Gagné!!
Votre voisin a oublié que $(a \neq b)$ et $(c \neq d)$ n'entraînent pas $(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d})$, (considérez les nombres $a = 3, b = 6, c = 12, d = 24$).
Comment peut-on rédiger?

1. Supposons donc $u_n \neq -1$ et démontrons $u_{n+1} \neq -1$. Par calcul, on obtient:

$$u_{n+1} + 1 = \frac{4(u_n+1)}{2u_n+5}$$

Comme $u_n + 1 \neq 0$, $u_{n+1} + 1 \neq 0$ et $u_{n+1} \neq -1$. D'où le résultat.
Moralité:

$\boxed{\textbf{Méditez bien sur l'équivalence } (a \neq b \Leftrightarrow a - b \neq 0)}$

Plutôt que montrer $u_{n+1} \neq b$, mieux vaut montrer $u_{n+1} - b \neq 0$

2. 2-a. On obtient, pour tout entier n, $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$. D'où:

$$\forall n \in \mathbf{N}\ v_n = (\frac{3}{4})^n v_0 = (\frac{3}{4})^n \frac{3}{2}$$

2-b. Or $v_n = \frac{2u_n+1}{u_n-1}$. Donc, $u_n(v_n - 2) = 1 - v_n$. Pour tout entier n, $v_n \neq 2$: en effet, $v_n = 2$ est équivalent à $3^{n+1} = 4^{n-1}$, ce qui est impossible. On peut donc écrire:

$$u_n = \frac{1-v_n}{v_n-2}$$

puis,

$$u_n = \frac{1-(\frac{3}{4})^n\frac{3}{2}}{(\frac{3}{4})^n\frac{3}{2}-2}$$

Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, $lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et

$$lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}.$$

Deuxième partie

Enoncé:

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et vérifiant, pour tout entier naturel n, les relations:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Ecrire un algorithme de calcul de u_n et v_n pour n donné.

Démonstration de mon voisin:

?!☹!?

1. Démontrons par un raisonnement par récurrence la proposition $P(n)$:" u_n et v_n sont bien définis".

   $P(0)$ est vraie car $u_0 = 1$, $v_0 = 2$.

   Supposons $P(n)$. u_n et v_n sont bien définis, donc $\sqrt{u_n v_n}$ et $u_n + v_n$ sont bien définis, et $P(n+1)$ vraie.

   On a montré par récurrence $P(n)$, pour tout entier naturel n.

2.
```
PROGRAM CalculSuite;
VAR u,v:real;
    n,k:integer;
BEGIN
Write('valeur de n:');Readln(n);
u:=1;v:=2;
FOR k:=0 TO n-1 DO BEGIN
    u:=sqrt(u*v);
    v:=(u+v)/2;
    END;
Writeln(u,v);
END.
```

Gagné!!

1. Supposer seulement que u_n et v_n sont bien définis, ne suffit pas pour démontrer que u_{n-1} est bien défini. La proposition à démontrer par récurrence est: "u_n et v_n sont bien définis et **positifs**".

2. Une caractéristique d'une variable informatique est, lors du remplacement de l'ancienne valeur de la variable par une nouvelle valeur, de perdre cette ancienne valeur. Sur l'exemple traité, cela a pour conséquence que la traduction de

```
FOR k:=0 TO n-1 DO BEGIN
    u:=sqrt(u*v);
    v:=(u+v)/2;
    END;
```

est:

```
Pour k variant de 0 à n-1 faire
```

$$\begin{cases} u_{k+1} = \sqrt{u_k v_k} \\ v_{k+1} = (\boxed{u_{k-1}} + v_k)/2 \end{cases}$$

Votre voisin a donc écrit un algorithme de calcul de suites, qui ne sont pas celles de l'énoncé. Pour corriger cette erreur, il lui suffit de déclarer une nouvelle variable w du type real (qu'on appelle souvent variable auxiliaire ou variable tampon), qui lui permettra de conserver l'ancienne valeur de u. Il remplacera alors l'ancienne boucle FOR par:

```
FOR k:=0 TO n-1 DO BEGIN
    w:=u;
    u:=sqrt(u*v);
    v:=(w+v)/2;
    END;
```

****

A vous de jouer !!!

****

☺

Troisième partie

Enoncé: Dans une classe de prépa EC, composée de 22 filles et 18 garçons, on veut former un comité de "joyeux matheux" constitué de 5 membres. Pour respecter la nouvelle législation sur la parité, ce comité doit être composé d'au moins 2 filles et d'au moins 2 garçons. Combien a t'on de possibilités?

Démonstration de mon voisin:

?!☹!?

- Je prends 2 charmantes demoiselles parmi 22: j'ai C_{22}^2 possibilités.

- Je prends 2 charmants damoiseaux parmi 18: j'ai C_{18}^2 possibilités.
- Je complète mon comité en prenant 1 individu parmi les 36 restants: j'ai C_{36} possibilités.

Le nombre total de cas possibles est donc:

$$C_{22}^2 \times C_{18}^2 \times C_{36}^1 = 1272348.$$

****

A vous de jouer !!!

****

☺

Gagné!

Votre voisin compte plusieurs fois certains cas.

Remarquons qu'un comité ne peut être constitué que de, soit 3 filles et 2 garçons, soit 2 filles et 3 garçons. Le nombre de comités constitués de 3 filles et 2 garçons vaut $C_{22}^3 \times C_{18}^2$. Le nombre de comités constitués de 2 filles et 3 garçons vaut $C_{22}^2 \times C_{18}^3$.

Le nombre total de cas possibles est donc:

$$C_{22}^3 \times C_{18}^2 + C_{22}^2 \times C_{18}^3 = 424116$$

(soit un tiers du résultat de votre voisin)

2.4 Quatrième partie

Enoncé: Au jeu de poker, on prend simultanément 5 cartes dans un jeu de 32.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une paire?
   (exemple: Roi de ♡, Roi de ♢, Valet de ♣, Dame de ♡, 10 de ♢)
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un brelan (3 cartes de même niveau)?
   (exemple: As de ♡, As de ♢, As de ♣, Dame de ♡)
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un full, c'est à dire une paire et un brelan de niveaux différents?
   (exemple: Roi de ♡, Roi de ♢, As de ♡, As de ♢, As de ♣)
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires exactement, et de niveaux différents?
   (exemple: Roi de ♡, Roi de ♢, As de ♡, As de ♢, Valet de ♣)

Démonstration de mon voisin:
(pour les questions 1, 2, 3 tout ira bien; cela se gatera pour la question 4)

?!☹!?

1. L'univers représentant le tirage simultané de 5 cartes dans un jeu de 32 est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes, de cardinal C_{32}^5. On le munit de la probabilité uniforme.
   - je choisis le niveau de la paire, il y a C_8^1 choix
   - je choisis la paire, il y a C_4^2 choix

   je choisis les 3 niveaux des 3 autres cartes différents de celui de la paire, et une carte dans chacun de ces niveaux, il y a $C_7^3 \times (C_4^1)^3$ choix

   La probabilité cherchée est donc:
   $$p_1 = \frac{C_8^1 \times C_4^2 \times C_7^3 \times (C_4^1)^3}{C_{32}^5}$$
   soit
   $$p_1 = \frac{120}{899}.$$
2. je choisis le niveau du brelan, il y a C_8^1 choix
   - je choisis le brelan, il y a C_4^3 choix

   je choisis les 2 niveaux des 2 autres cartes différents de celui du brelan, et une carte dans chacun de ces niveaux, il y a $C_7^2 \times (C_4^1)^2$ choix

   La probabilité cherchée est donc:
   $$p_2 = \frac{C_8^1 \times C_4^3 \times C_7^2 \times (C_4^1)^2}{C_{32}^5}$$
   soit
   $$p_2 = \frac{72}{899}.$$
3. Pour dénombrer les fulls,
   - je choisis le niveau de la paire, il y a C_8^1 choix
   - je choisis la paire, il y a C_4^2 choix
   - je choisis le niveau du brelan, différent de celui de la paire, il y a C_7 choix
   - je choisis le brelan, il y a C_4^3 choix

   La probabilité cherchée est donc:
   $$p_3 = \frac{C_8^1 \times C_4^2 \times C_7^1 \times C_4^3}{C_{32}^5}$$
   soit
   $$p_3 = \frac{6}{899}.$$
4. Procédons de façon analogue. Pour dénombrer les doubles paires,

- je choisis le niveau de la première paire, il y a C_8^1 choix
  - je choisis la paire, il y a C_4^2 choix
  - je choisis le niveau de la deuxième paire différent de celui de la première paire, il y a C_7^1 choix
  - je choisis la paire, il y a C_4^2 choix
  - je choisis la 5ème carte dans un niveau différent, il y a C_{24}^1 choix

La probabilité cherchée est donc:

$$p_4 = \frac{C_8^1 \times C_4^2 \times C_7^1 \times C_4^2 \times C_{24}^1}{C_{32}^5}$$

soit

$$p_4 = \frac{216}{899}.$$

****

A vous de jouer !!! (erreur dans la dernière question)

****

☺

Gagné!!

C'est dans la dernière question que votre voisin compte plusieurs fois certains cas. Après une très belle démonstration pour les premières questions ,il a voulu procéder par analogie avec le cas du full. Mais, "Première paire et deuxième paire" sont "meaningless"!!! En effet, au poker, on reçoit 5 cartes d'un seul coup!! (votre voisin a d'ailleurs bien dit au départ que le cardinal de l'univers est C_{32}^5...)

Voici un exemple pour mieux comprendre l'erreur de votre voisin.. Pour lui, les deux donnes suivantes sont distinctes!

- Première donne:
  - Première paire: As. As de ♣, As de ♠.
  - Deuxième paire: Roi. Roi de ♡, Roi de ♢.
  - Cinquième carte: Valet de ♣.
- Deuxième donne:
  - Première paire: Roi. Roi de ♡, Roi de ♢.
  - Deuxième paire: As. As de ♣, As de ♠.
  - Cinquième carte: Valet de ♣.

Votre voisin aurait pu proposer la solution suivante.

- je choisis les deux niveaux où seront constituées les deux paires; il y a C_8^2 choix. Dans ces deux niveaux, il y a un niveau supérieur et un niveau inférieur.
- je choisis deux cartes du niveau inférieur, il y a C_4^2 choix
- je choisis deux cartes du niveau supérieur, il y a C_4^2 choix
- je choisis une carte d'un niveau différent des 2 précédents, il y a C_{24}^1 choix

La probabilité cherchée est donc:

$$p_4 = \frac{C_8^2 \times C_4^2 \times C_4^2 \times C_{24}^1}{C_{32}^5}$$

soit

$$p_4 = \frac{108}{899}.$$

Le lecteur perspicace vérifiera que la probabilité obtenue est égale à la moitié de celle obtenue par son voisin!

Nota Bene: Tous les raisonnements faux écrits ci dessus sont authentiques! Ils ont été commis récemment, soit à l'oral, soit à l'écrit, y compris lors des concours, par des élèves de première ou deuxième année des diverses filières. Nous ne citerons pas leurs noms pour éviter d'avoir à leur verser des droits d'auteurs!!